

# 随机激励下混联 II 型惯容 NES 减振特性研究\*

吴子英, 朱荣贤, 张禹轩, 王婧楠, 吴海涛

(西安理工大学机械与精密仪器工程学院 西安, 710048)

**摘要** 针对随机激励下振动系统的减振问题,提出了考虑摩擦与非线性阻尼的混联 II 型惯容非线性能量阱 (nonlinear energy sink, 简称 NES),建立了含新型 NES 主系统的动力学控制方程。首先,采用蒙特卡洛数值方法,研究了非线性刚度对减振性能的影响,当非线性刚度比  $\kappa_{21}$  逐渐增大时,主结构和混联 II 型惯容 NES 的位移概率密度函数出现了双峰变为单峰,以及速度概率密度函数由单峰变为双峰的随机跳跃现象。主结构的位移概率密度函数对非线性刚度  $\kappa_{22}$  的敏感性比  $\kappa_{21}$  更高,  $\kappa_{22}$  最佳取值区间为 200~1 000。其次,研究了噪声强度、阻尼比和惯质比对减振性能的影响,当噪声强度小于 0.1 或惯质比  $\mu$  在 0.1 左右时,惯容 NES 的减振效果较好。虽然线性阻尼比  $\lambda_1$  和非线性阻尼比  $\lambda_{21}$ 、 $\lambda_{22}$  增大会导致主结构和混联 II 型惯容 NES 的概率密度函数出现分岔不稳定现象,但增大非线性阻尼比有助于改善惯容 NES 的减振性能。最后,采用差分进化法对惯容 NES 的参数进行了优化。本研究可为受随机激励的振动系统减振研究提供技术参考。

**关键词** 随机激励;蒙特卡洛法;混联 II 型惯容 NES;概率密度函数

**中图分类号** TH113;O322

## 引言

非线性能量阱作为一种高效的减振装置,深受相关学者青睐。在受随机激励的 NES 研究方面, Su 等<sup>[1]</sup>采用随机平均方法研究了单自由度 NES 对窄带随机参数激励的共振响应,研究发现当阻尼较大或非线性强度较大时,峰值响应振幅会减小,而当随机激励的强度或频率较大时,峰值响应振幅会增大,并产生随机分岔现象。Starosvetsky 等<sup>[2]</sup>针对含 NES 的线性振子系统,研究了系统参数对靶向能量转移及调制响应的影响。Li 等<sup>[3]</sup>对含有非线性阻尼和非线性刚度的 NES 系统进行了随机激励下的减振性能研究,结果表明,在高激励条件下,非线性阻尼有利于提高减振性能。Xue 等<sup>[4]</sup>对含有立方非线性刚度的 NES 系统,基于广义谐波函数法,结合 Fokker-Planck-Kolmogorov 方程,进行了减振性能分析与参数敏感度研究。薛继仁等<sup>[5]</sup>针对单自由度 NES 系统,从噪声强度、阻尼系数和质量比等 3 个方面总结了主质量系统的转移概率密度函数变化规律。

部分学者对 NES 的相关参数进行了优化研究,以期获得更好的减振性能。刘良坤等<sup>[6]</sup>推导并得到

了基底白噪声激励下耦合惯容器的单自由度结构,及多自由度的最优阻尼参数和最优刚度参数。王孝然等<sup>[7]</sup>提出了一种含惯容和接地刚度的动力吸振器,利用固定点理论得到了系统的最优频率比和最优刚度比,并根据  $H_\infty$  优化准则求出了系统的最优阻尼比。

笔者使用滚珠丝杠惯容器与 NES 相结合,同时考虑摩擦力因素,提出了新型混联 II 型惯容 NES (简称新型惯容 NES),并进行了参数优化研究。

## 1 新型惯容 NES 力学模型

在文献[8]谐波激励研究的基础上,开展随机激励下新型惯容 NES 的减振特性研究。图 1 为新型惯容 NES 和非线性作用力的力学模型,新型惯容 NES 主要由惯容器、非线性作用力和非线性阻尼组成,其力学模型如图 1(a)所示,非线性作用力模型如图 1(b)所示。

滚珠丝杠惯容器结构简图如图 2 所示,惯容出力等于 2 个终端的加速度差与惯容质量之积<sup>[8]</sup>,即

$$F = b(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) \quad (1)$$

其中:  $b=0.33$  kg, 为惯容系数。

非线性弹簧在竖直方向的非线性恢复力<sup>[9]</sup>为

\* 国家自然科学基金资助项目(11572243)

收稿日期:2024-07-03;修回日期:2024-10-14

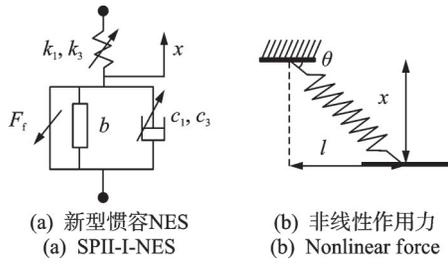


图 1 新型惯容 NES 和非线性作用力的力学模型

Fig.1 Mechanical model of a novel series-parallel-II inertial NES (SP II-I-NES) and nonlinear force

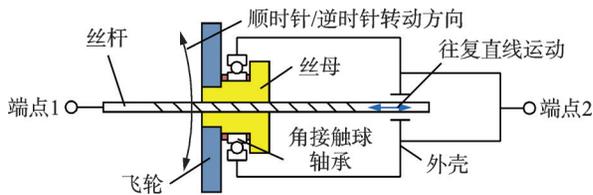


图 2 滚珠丝杠惯容器结构简图  
Fig.2 Schematic of ballscrew inerter

$$F_h = k_0(\sqrt{x^2 + l^2} - l_0) \sin \theta \quad (2)$$

其中:  $k_0$ 、 $l_0$  分别为线性弹簧的刚度系数和原长;  $l$  为弹簧在水平方向的投影长度;  $\sin \theta = x/(\sqrt{x^2 + l^2})$ 。

将式(2)在  $x=0$  处进行泰勒展开,有

$$F_h = k_1 x + k_3 x^3 + O(x^5) \quad (3)$$

其中:  $k_1$  为线性系数;  $k_3$  为非线性系数。

非线性阻尼模型为

$$F_z = c_1 \dot{x} + c_3 \dot{x}^3 \quad (4)$$

其中:  $c_1$  为线性系数;  $c_3$  为非线性系数。

丝杆和螺母间存在干摩擦力,摩擦力  $F_f$  与丝杠螺母间相对运动速度  $v$  之间存在相应关系<sup>[10]</sup>,即

$$F_f = -f_c \operatorname{sgn}(v) \quad (5)$$

其中:  $f_c$  为幅值。

$\operatorname{sgn}$  的定义为

$$F_f = -f_c \operatorname{sgn}(v) \begin{cases} \operatorname{sgn}(v) = 1 & (v > 0) \\ \operatorname{sgn}(v) = 0 & (v = 0) \\ \operatorname{sgn}(v) = -1 & (v < 0) \end{cases} \quad (6)$$

## 2 含新型惯容 NES 主系统力学模型

随机激励下  $W(t)$  含新型惯容 NES 主系统的力学模型<sup>[11]</sup>如图 3 所示,其系统的动力学方程为

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_{21}(x_1 - x_2) + k_{22}(x_1 - x_2)^3 = W(t) \\ b \ddot{x}_2 + c_{21} \dot{x}_2 + c_{22} \dot{x}_2^3 + k_{21}(x_2 - x_1) + k_{22}(x_2 - x_1)^3 - F_f = 0 \end{cases} \quad (7)$$

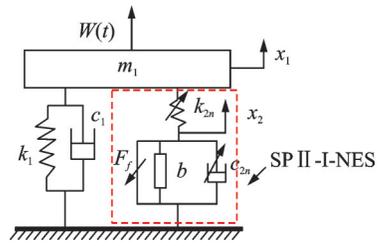


图 3 含新型惯容 NES 主系统力学模型<sup>[11]</sup>

Fig.3 Mechanical model of main system with SP II-I-NES<sup>[11]</sup>

其中:  $m_1$ 、 $k_1$  和  $c_1$  分别为主系统的质量、刚度和阻尼;  $b$  为惯容系数,  $k_{21}$  和  $k_{22}$  为非线性刚度项的系数;  $c_{21}$  和  $c_{22}$  为非线性阻尼项系数;  $F_f$  为摩擦力;  $\dot{x}_1$  为  $x_1$  对时间  $t$  的导数。

对式(7)进行进一步化简,有

$$\begin{cases} x_1'' + \lambda_1 x_1' + x_1 + \kappa_{21}(x_1 - x_2) + \kappa_{22}(x_1 - x_2)^3 = \xi(\tau) \\ \mu x_2'' + \lambda_{21} x_2' + \lambda_{22} x_2'^3 + \kappa_{21}(x_2 - x_1) + \kappa_{22}(x_2 - x_1)^3 - F_f' = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中:  $\mu = b/m_1$ ;  $\omega_1$  为主结构的固有频率,  $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$ ;  $\kappa_{21} = k_{21}/k_1$ ,  $\kappa_{22} = k_{22}/k_1$ ;  $\lambda_1 = c_1/(m_1 \omega_1)$ ;  $\lambda_{21} = c_{21}/(m_1 \omega_1)$ ;  $\lambda_{22} = c_{22}/(m_1 \omega_1)$ ;  $F_f' = F_f/(m_1 \omega_1^2)$ ;  $\lambda_1$  为主结构的阻尼比;  $\kappa_{21}$  和  $\kappa_{22}$  为刚度比值;  $\lambda_{21}$  和  $\lambda_{22}$  为非线性阻尼比;  $\xi(\tau)$  表示强度等于  $2D$  的零均值高斯过程,满足  $E[\xi(\tau)\xi(t+\tau)] = 2D\delta(\tau)$ ;  $E(\cdot)$  为数学期望,即狄利克雷函数;  $x_1'$  为  $x_1$  对时间  $\tau$  的导数。

为研究方便,后续数值仿真研究中采用无量纲单位。随机激励采用理想高斯白噪声,数学模型为

$$\xi_i = \sqrt{2D/\Delta t} \operatorname{randn}(1, n) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

其中:  $D$  为强度;  $\Delta t$  为间隔;  $\operatorname{randn}(1, n)$  为符合正态分布的随机数。

## 3 求解方法

蒙特卡洛法的实现思想植根于概率论,从大量响应样本中获得系统响应的统计特性。

将式(8)改写为 Euler 格式,利用 Euler 差分格式求解,令

$$\begin{cases} u_1 = x_1 \\ u_2 = x_1' \\ u_3 = x_2 \\ u_4 = x_2' \end{cases} \quad (10)$$

将式(8)写成微分方程格式,即

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \xi(\tau) - \lambda_1 u_2 - u_1 - \kappa_{21}(u_1 - u_3) - \\ \kappa_{22}(u_1 - u_3)^3 \\ u_4 \\ (F_f' - \lambda_{21} u_4 - \lambda_{22} u_4^3 + \kappa_{21}(u_1 - u_3) + \\ \kappa_{22}(u_1 - u_3)^3) / \mu \end{bmatrix} \quad (11)$$

将式(11)改写为 Euler 差分格式,即

$$\begin{cases} u_1(t_{n+1}) = u_1(t_n) + u_2 \Delta t \\ u_2(t_{n+1}) = u_2(t_n) + (\xi(t) - \lambda_1 u_2(t_n) - \\ u_1(t_n) - \kappa_{21}(u_1(t_n) - u_3(t_n)) - \\ \kappa_{22}(u_1(t_n) - u_3(t_n))^3) \Delta t \\ u_3(t_{n+1}) = u_3(t_n) + u_4 \Delta t \\ u_4(t_{n+1}) = u_4(t_n) + ((F_f' - \lambda_{21} u_4(t_n) - \\ \lambda_{22} u_4^3(t_n) + \kappa_{21}(u_1(t_n) - u_3(t_n)) - \\ \kappa_{22}(u_1(t_n) - u_3(t_n))^3) / \mu) \Delta t \\ t_{n+1} = t_n + \Delta t \end{cases} \quad (12)$$

表 1 为新型惯容 NES 系统的仿真参数<sup>[11]</sup>。图 4 为未加减振系统及传统 NES(traditional NES, 简称 T-NES)、混联 II 型惯容(series-parallel-II inerter, 简称 SP II-I)和混联 I 型惯容 NES(series-parallel-I inerter NES, 简称 SP I-I-NES)减振模型的力学模型, 以上 4 种主系统稳态响应的概率密度函数如图 5 所示。图 5 中:  $X_1$  为主系统的位移;  $\rho(X_1)$  为对应位移的概率密度;  $X_1'$  为主系统的速度响应;  $\rho(X_1')$  为对应速度的概率密度。分析可知, 新型惯容 NES 的减振效果最好。

表 1 新型惯容 NES 系统仿真参数<sup>[11]</sup>

Tab.1 Simulation parameters of SPII-I-NES system<sup>[11]</sup>

名称	符号/单位	数值
主系统质量	$m_1/\text{kg}$	3.3
惯容系数	$b/\text{kg}$	0.33
阻尼	$c_1/(\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1})$	1.4
刚度	$k_1/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	2 814
阻尼系数	$c_{21}/(\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m})$	5
非线性阻尼系数	$c_{22}/(\text{N}\cdot\text{s}^3\cdot\text{m}^{-3})$	5
线性刚度	$k_{21}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	4 814
非线性刚度	$k_{22}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-3})$	199 980
激励幅值	$A/\text{m}$	0.005
激励频率	$\omega_1/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$	29.2
惯质比	$\mu$	0.1
摩擦力	$F_f/\text{N}$	5

## 4 新型惯容 NES 参数影响

### 4.1 $\kappa_{21}$ 和 $\kappa_{22}$

#### 4.1.1 $\kappa_{21}$ 变化和 $\kappa_{22}$ 不变

图 6 为主系统概率密度  $\rho(X_1)$  和  $\rho(X_1')$  随着  $\kappa_{21}$

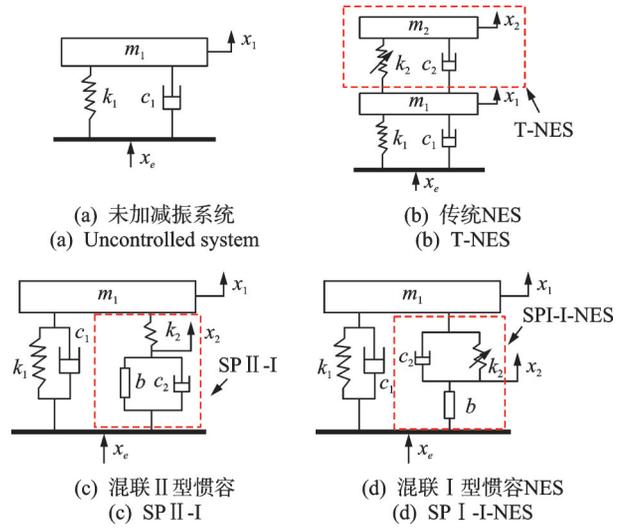
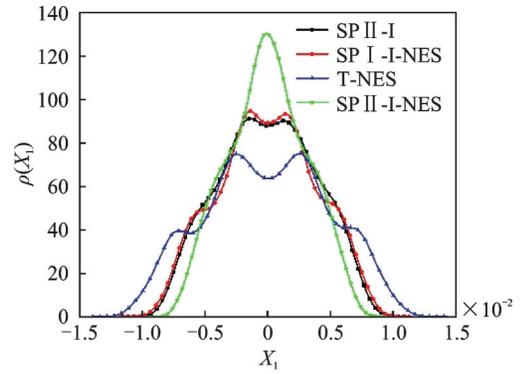
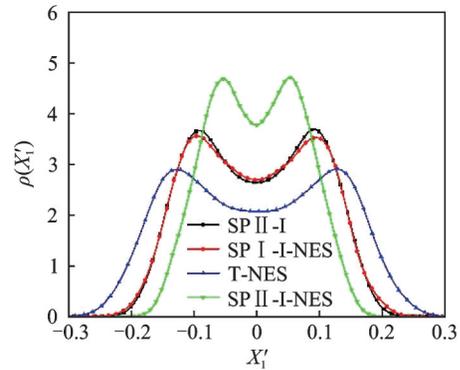


图 4 未加减振系统及 3 种减振模型的力学模型

Fig.4 Mechanical models of uncontrolled system and 3 types of vibration reduction models



(a) 位移  
(a) Displacement



(b) 速度  
(b) Velocity

图 5 主系统稳态响应的概率密度函数

Fig.5 Probability density of steady response of the main system

变化的关系曲线, 主系统概率密度随着  $\kappa_{21}$  的增大而峰值呈减小趋势。对于不同的  $\kappa_{21}$ , 主系统敏感性有所差异。  $\kappa_{21} = [0.1, 1.33]$  时, 主系统对于  $\kappa_{21}$  的敏感性较强, 峰值减小的幅度较大。但当  $\kappa_{21}$  增加, 敏感性迅速减弱, 峰值缓慢下降。另外, 随着  $\kappa_{21}$  增大, 主系统概率密度的峰值和形态均发生变化。当  $\kappa_{21} <$

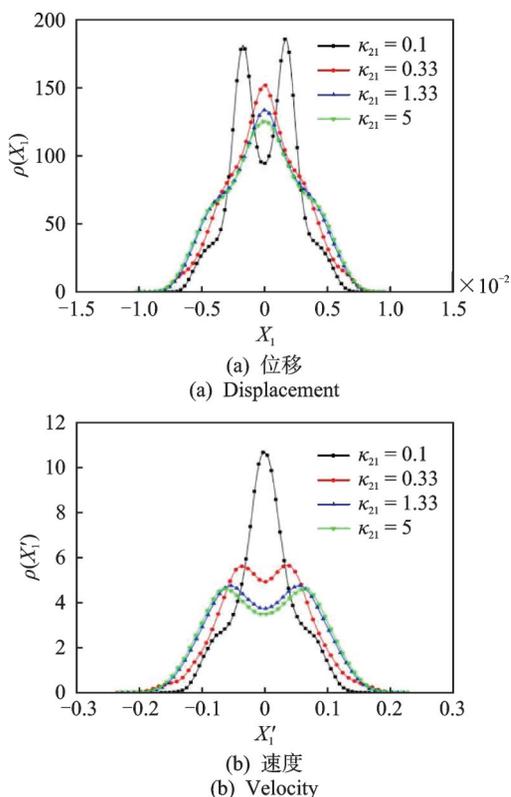


图 6 不同刚度比  $\kappa_{21}$  下主系统概率密度

Fig.6 Probability density functions of main system under different  $\kappa_{21}$

0.1时,主系统的 $\rho(X_1)$ 曲线为2个波峰,呈现先降低再升高的抛物线形。当 $\kappa_{21} > 0.33$ 时,主系统概率密度曲线的波峰数从2个变为1个。主系统 $\rho(X_1')$ 曲线则呈相反趋势, $\kappa_{21} = [0.1, 0.33]$ 时,主系统 $\rho(X_1')$ 峰值迅速减小,概率密度曲线的2个波峰呈现先降低再升高趋势,且1个波峰变为2个波峰,这一现象被称为随机跳跃<sup>[12]</sup>。当稳态概率密度呈2个波峰时,系统响应从一个较大可能状态转变为另一个状态,反之亦然,这是典型的随机P-分岔。

不同刚度比 $\kappa_{21}$ 下新型惯容NES概率密度如图7所示。随着 $\kappa_{21}$ 的增加,图7(a)中新型惯容NES的 $\rho(X_2)$ 与性态均由双峰变单峰,不同于图6之处在于峰值呈逐渐增加趋势。

4.1.2  $\kappa_{22}$  变化和  $\kappa_{21}$  不变

不同刚度比 $\kappa_{22}$ 下主系统概率密度如图8所示。图8中主系统 $\rho(X_1)$ 和 $\rho(X_1')$ 的峰值随着 $\kappa_{22}$ 的增加呈先上升再下降的趋势。当 $\kappa_{22} = [10, 200]$ 时,主系统对于非线性刚度敏感性较小,峰值增加较慢。当 $\kappa_{22}$ 继续增加到1000时,主系统对于非线性刚度的敏感性增强,峰值下降迅速。因此,在 $\kappa_{22} = [200, 1000]$ 间存在最佳非线性刚度。

图9为不同刚度比 $\kappa_{22}$ 下新型惯容NES概率密

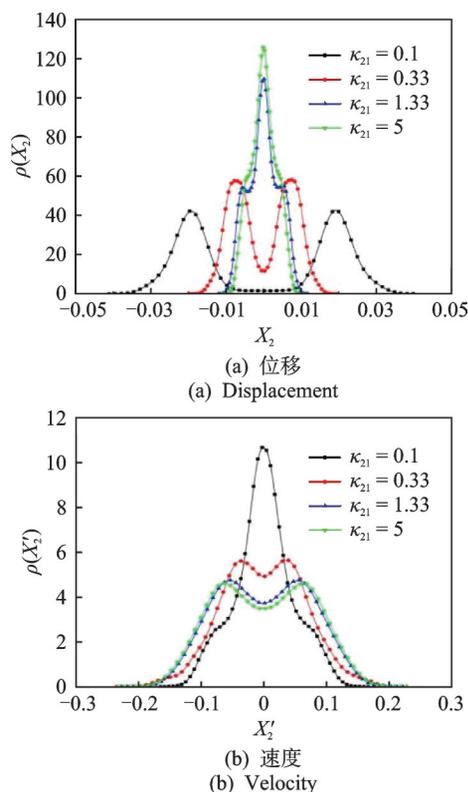


图 7 不同刚度比  $\kappa_{21}$  下新型惯容 NES 概率密度

Fig.7 Probability density functions of SP II -I-NES under different  $\kappa_{21}$

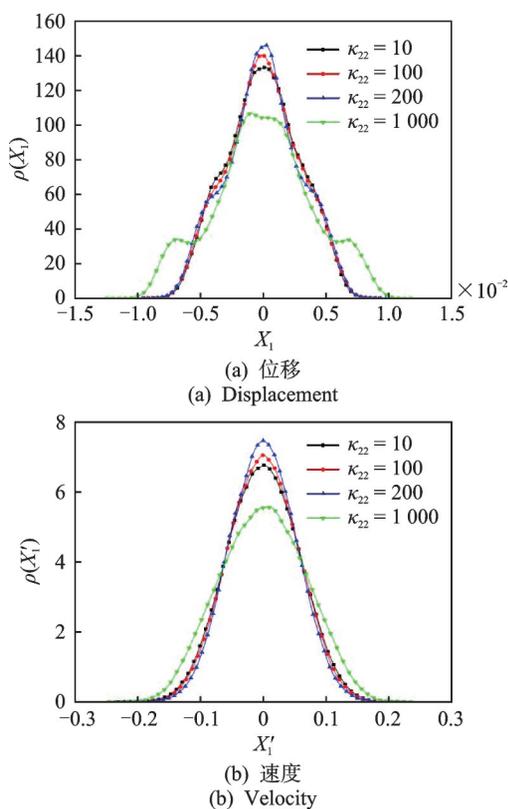


图 8 不同刚度比  $\kappa_{22}$  下主系统概率密度

Fig.8 Probability density functions of main system under different  $\kappa_{22}$

度。新型惯容 NES 的  $\rho(X_2)$  和  $\rho(X'_2)$  峰值随着  $\kappa_{22}$  增加,先缓慢增加后迅速降低。随着  $\kappa_{21}$  增加,图 9(b) 中新型惯容 NES 的  $\rho(X'_2)$  与图 7(b) 形态均从单峰变双峰,不同之处在于图 7(b) 的峰值基本不变。当  $\kappa_{22} = [10, 200]$  时,非线性刚度的影响相对较弱,峰值仅有微小增加。当  $\kappa_{22}$  增加到 1 000 时,主系统对于非线性刚度敏感性增强,峰值迅速下降,形态也随之改变。随着  $\kappa_{22}$  的增加,新型惯容 NES 的  $\rho(X_2)$  曲线波峰由 3 个减少为 2 个,  $\rho(X'_2)$  则稳定为 2 个波峰。

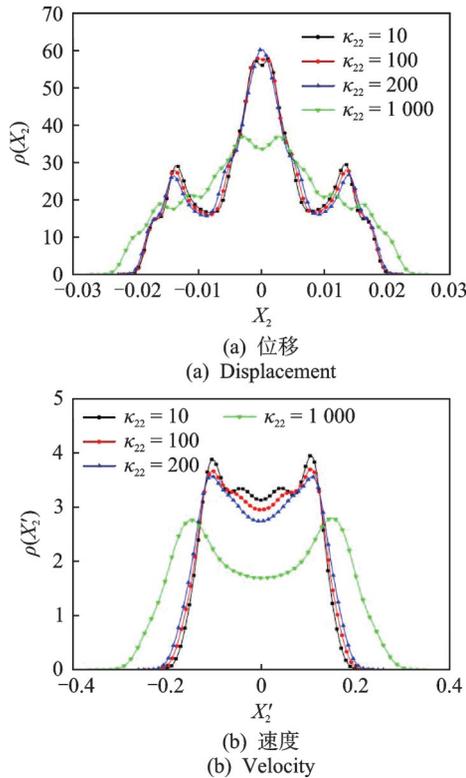


图 9 不同刚度比  $\kappa_{22}$  下新型惯容 NES 概率密度  
Fig.9 Probability density functions of SP II -I-NES under different  $\kappa_{22}$

4.2 噪声强度

图 10、11 分别为不同噪声强度下的主系统概率密度及新型惯容 NES 概率密度。当  $D=0.001$  时,主系统和新型惯容 NES 的  $\rho(X_1)$  和  $\rho(X'_1)$  峰值最高,表明减振效果较好。当  $D>0.1$  时,  $\rho(X_1)$  和  $\rho(X'_1)$  峰值显著下降。当  $D=1$  时,主系统的  $\rho(X_1)$  和  $\rho(X'_1)$  急剧减小,表明减振效果显著减弱。由文献[5]可知,在噪声强度为 1 时, T-NES 减振系统的概率密度基本为 0,减振能力消失。以上分析表明新型惯容 NES 减振系统提高了实际工程应用时的容错率,说明新型惯容 NES 适用于噪声激励较小的场景。

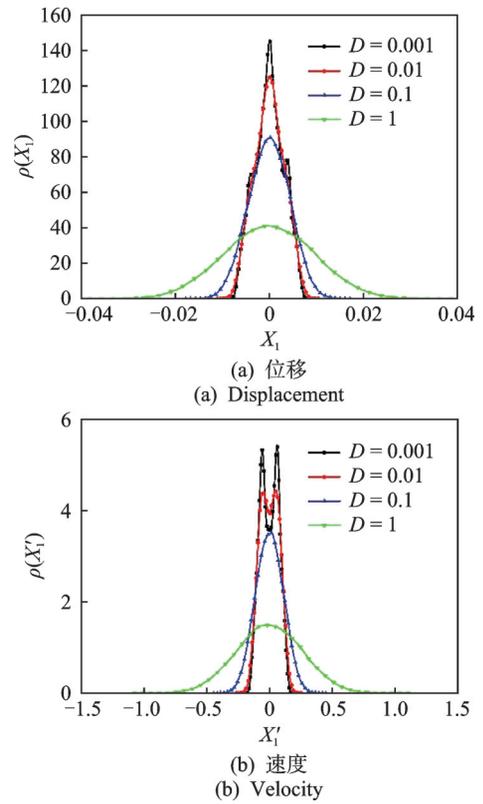


图 10 不同噪声强度下主系统概率密度  
Fig.10 Probability density functions of main system under different noise intensities

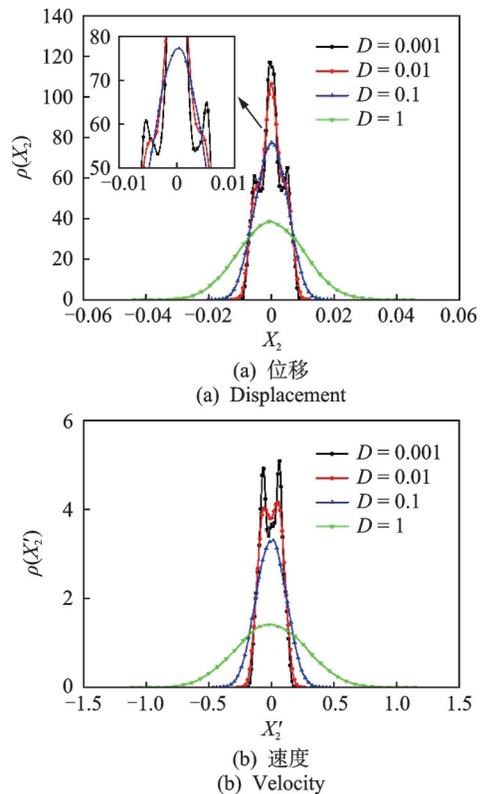


图 11 不同噪声强度下新型惯容 NES 概率密度  
Fig.11 Probability density functions of SP II -I-NES under different noise intensities

### 4.3 线性阻尼

不同线性阻尼比下的主系统概率密度及新型惯容 NES 概率密度分别如图 12、13 所示。随着  $\lambda_1$  的增大,主系统的  $\rho(X_1)$ 、 $\rho(X'_1)$  以及新型惯容 NES 的  $\rho(X'_2)$  峰值均增加,仅新型惯容 NES 的  $\rho(X_2)$  峰值减小,故随着  $\lambda_1$  的增大,大部分能量被新型惯容 NES 质量吸收。图 7 中  $\kappa_{21}$  的变化导致了主系统  $\rho(X_1)$  的波峰由 2 个变为 1 个,  $\rho(X'_1)$  的波峰由 1 个变为 2 个,呈现随机分岔现象。因此,  $\lambda_1$  变化时会导致主系统的  $\rho(X_1)$  和  $\rho(X'_1)$  曲线波峰从一个变为 2 个的分岔现象。随着  $\lambda_1$  的增大,主系统  $\rho(X_1)$  和新型惯容 NES 的  $\rho(X_2)$  出现分岔,主系统稳定性变差。因此,建议  $\lambda_1$  的取值不宜过大。

### 4.4 非线性阻尼

非线性阻尼有线性系数  $c_{21}$  和非线性系数  $c_{22}$ , 其他参数值保持不变,同时改变组合  $c_{21}$  和  $c_{22}$ ,不同阻尼比  $\lambda_{21}$ 、 $\lambda_{22}$  下主系统与新型惯容 NES 概率密度如图 14、15 所示。随着  $\lambda_{21}$  和  $\lambda_{22}$  的增加,主系统的  $\rho(X_1)$  和  $\rho(X'_1)$  和新型惯容 NES 的  $\rho(X'_2)$  峰值保持稳定增加。当  $\lambda_{21}$  和  $\lambda_{22}$  为 0.25 时,新型惯容 NES 的  $\rho(X'_2)$  曲线从 2 个波峰变为 1 个波峰,随机分岔现象

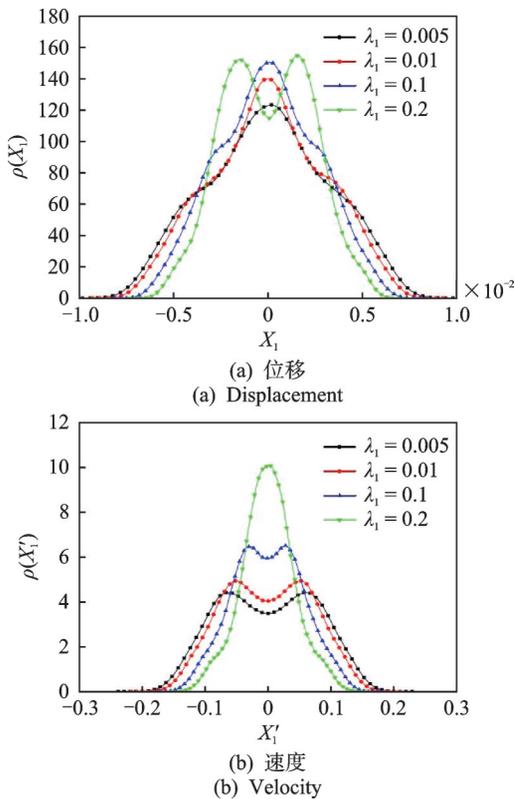


图 12 不同线性阻尼比下主系统的概率密度  
Fig.12 Probability density functions of main system under different linear damping ratios

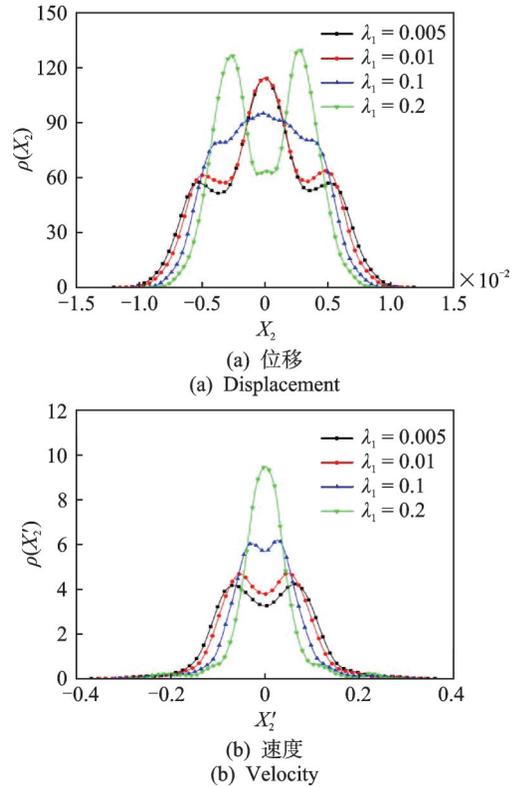


图 13 不同线性阻尼比下新型惯容 NES 概率密度  
Fig.13 Probability density functions of SP II-I-NES under different linear damping ratios

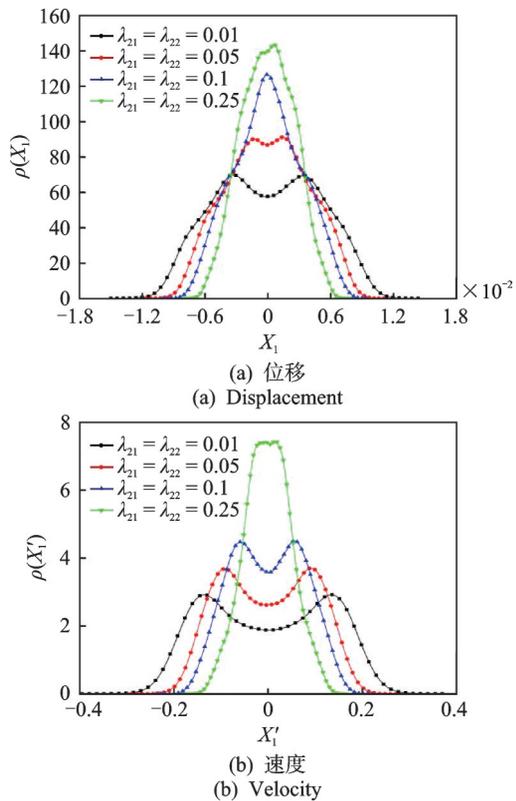


图 14 不同阻尼比  $\lambda_{21}$ 、 $\lambda_{22}$  下主系统概率密度  
Fig.14 Probability density functions of the main system under different  $\lambda_{21}$  and  $\lambda_{22}$

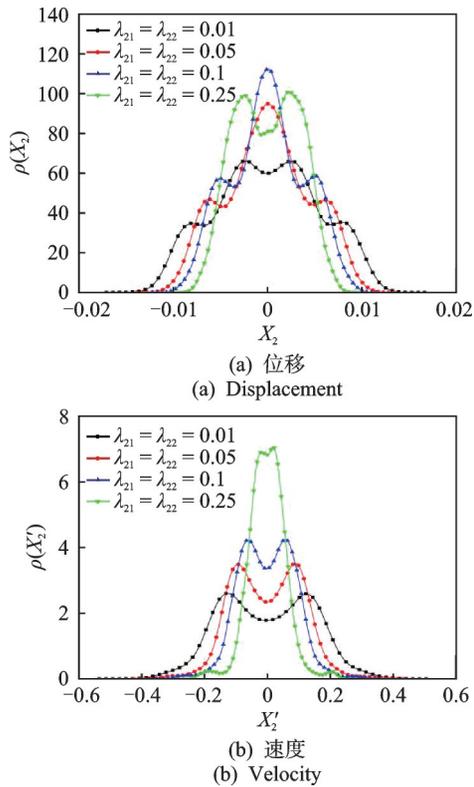


图 15 不同阻尼比  $\lambda_{21}$ 、 $\lambda_{22}$  下新型惯容 NES 概率密度  
Fig.15 Probability density functions of SP II-I-NES under different  $\lambda_{21}$  and  $\lambda_{22}$

消失。主系统的  $\rho(X_1)$  和  $\rho(X'_1)$  和新型惯容 NES 的  $\rho(X'_2)$  曲线更陡, 主系统响应达到平稳的概率最大。尽管新型惯容 NES 的  $\rho(X_2)$  曲线的峰值降低, 且波形由 1 个波峰转变为 2 个波峰, 出现了随机分岔现象, 但这一变化对系统的减振性能影响较小。因此, 可通过增大  $\lambda_{21}$  和  $\lambda_{22}$  来提升主系统的减振性能。

#### 4.5 惯质比

图 16、17 为不同惯质比下仿真结果主系统与新型惯容 NES 概率密度仿真结果。图 16 中, 随着  $\mu$  的逐渐增加, 主系统的  $\rho(X_1)$  和  $\rho(X'_1)$  峰值先逐渐增加后减小。具体而言, 当  $\mu = [0.05, 0.5]$  时, 2 个指标的峰值逐渐增加, 当  $\mu > 0.5$  时, 2 个指标的峰值则迅速下降。同时, 主系统的位移和速度概率密度曲线由 2 个波峰变为 1 个波峰, 随机分岔现象也随之消失。

由图 17, 随着  $\mu$  的增加, 主系统的  $\rho(X_1)$  和  $\rho(X'_1)$  峰值先增加后减小。这表明在追求最佳减振效果时, 参数  $\mu$  存在一个最优数值。当  $\mu > 0.1$  时, 新型惯容 NES 的  $\rho(X_2)$  峰值有所降低, 且曲线由 2 个波峰变为 3 个波峰。然而, 新型惯容 NES 的  $\rho(X'_2)$  曲线始终为 2 个波峰, 表明系统的稳定性减

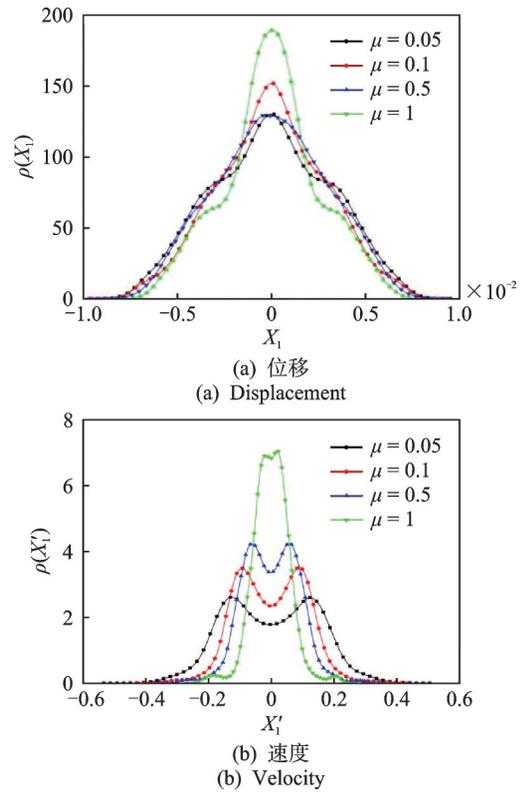


图 16 不同惯质比下主系统概率密度  
Fig.16 Probability density functions of main system under different inertial mass ratios

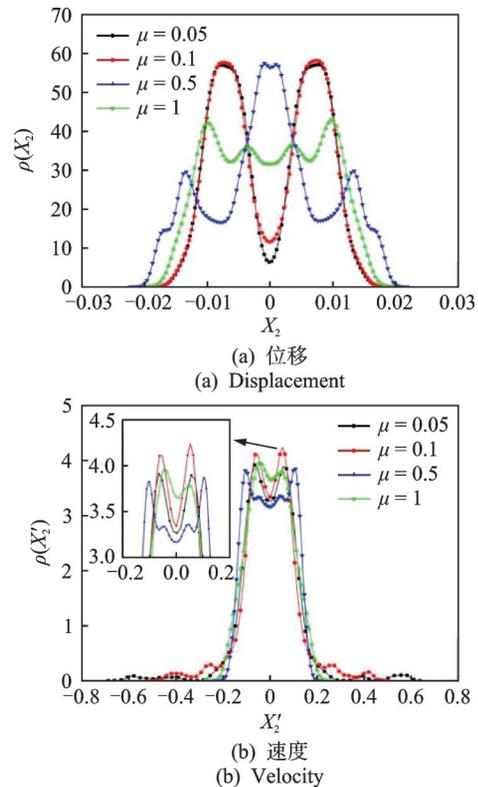


图 17 不同惯质比下新型惯容 NES 概率密度  
Fig.17 Probability density functions of SP II-I-NES under different inertial mass ratios

弱。因此,笔者建议 $\mu$ 取值应在 0.1 左右,这一数值契合 NES 减振目的,但惯质比不应低于 0.1。这是由于,当 $\mu$ 小于 0.1 时,不仅会导致主系统的 $\rho(X_1')$ 峰值降低,而且会使得曲线的波峰由 1 个变为 2 个,随机分岔现象愈发明显,易增加系统的不稳定性。

### 4.6 参数优化

新型惯容 NES 的参数优化可表述为最大值的最小化问题,即

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma(\lambda_{21}, \lambda_{22}, \kappa_{21}, \kappa_{22}, \mu, \lambda_1, \omega_1) \\ \text{s.t.} \quad & \lambda_{21}, \lambda_{22} \in R_1, \kappa_{21} \in R_2, \kappa_{22} \in R_3 \end{aligned} \quad (13)$$

其中: $\sigma$ 为参数优化的目标函数。

笔者以主结构位移响应均方根的最小值为目标函数,采用差分进化法对新型惯容 NES 控制参数进行优化,参数优化流程如图 18 所示。优化后的新型惯容 NES 参数见表 2。

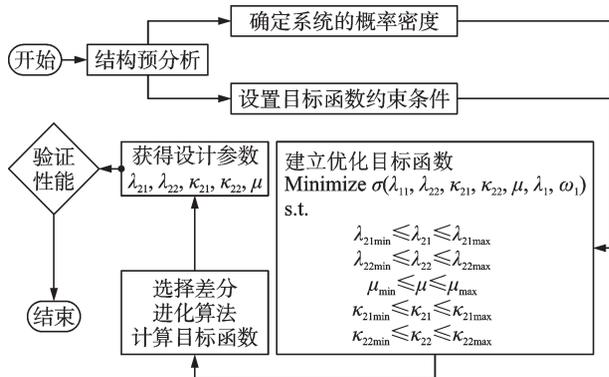


图 18 新型惯容 NES 参数优化流程图

Fig.18 Flow chart of parameter optimization of SP II -I-NES

表 2 优化后的新型惯容 NES 参数

Tab.2 Optimized parameters of SP II -I-NES

名称	符号与单位	数值
固有频率	$\omega_1 / (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	29.2
无量纲线性阻尼比	$\lambda_1$	0.06
无量纲阻尼比	$\lambda_{21}$	0.15
阻尼比	$\lambda_{22} / (\text{N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-2})$	0.15
无量纲刚度比	$\kappa_{21}$	0.40
惯质比	$\mu$	0.1
刚度比	$\kappa_{22} / \text{m}^{-2}$	1.38

图 19、20 分别为最优参数与非最优参数下主系统与新型惯容 NES 的概率密度。最优参数下,主系统的 $\rho(X_1)$ 和 $\rho(X_1')$ 峰值大于偏离参数优化值的峰值,而新型惯容 NES 的 $\rho(X_2)$ 和 $\rho(X_2')$ 峰值小于偏离参数优化值的峰值,这验证了最优参数下主系统的减振性能较好。

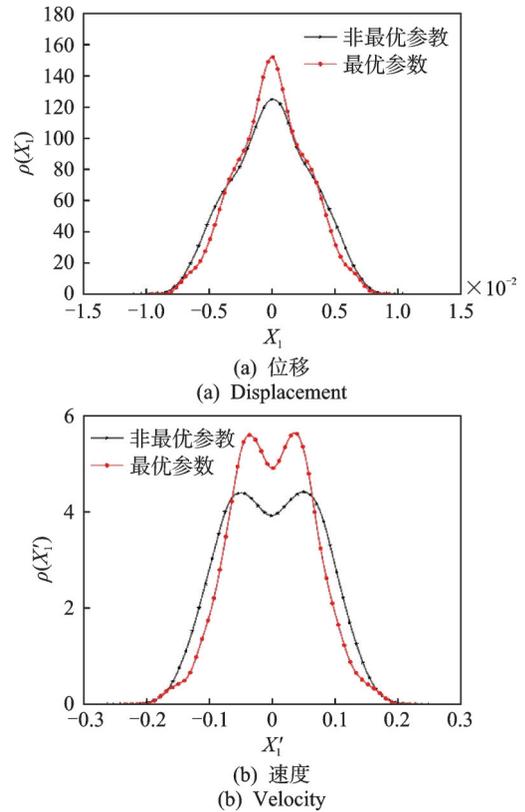


图 19 最优参数与非最优参数下主系统概率密度

Fig.19 Probability density functions of main system with optimal and non-optimal parameters

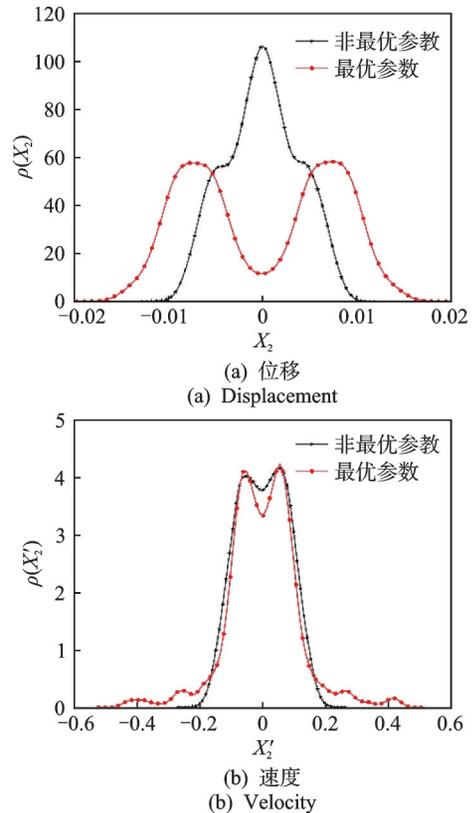


图 20 最优参数与非最优参数下新型惯容 NES 概率密度

Fig.20 Probability density functions of SP II -I-NES with optimal and non-optimal parameters

## 5 结 论

1) 随着  $\kappa_{21}$  的增加,系统的减振效果逐渐下降。当  $\kappa_{21}$  较小时,主系统的  $\rho(X_1)$  曲线为2个波峰,系统发生随机分岔,2个波峰相距较近,说明发生随机分岔的可能性较大。随着  $\kappa_{21}$  的增加,主系统的  $\rho(X_1)$  曲线由2个波峰变为1个波峰,随机分岔消失,系统稳定性增强。因此,系统减振效果达到最佳时,系统存在最佳刚度比。随着  $\kappa_{22}$  的逐渐增大,系统的减振效果先上升后降低,当  $\kappa_{22}=[200, 1000]$  时,系统存在最优刚度比,可达到最佳的减振效果。

2) 随着噪声强度增大,系统的减振效果迅速下降,特别是当噪声强度  $D > 1$  时,系统的概率密度曲线峰值迅速降低至趋于0,说明系统在高噪声强度激励下的减振效果不佳。主系统的  $\rho(X_1)$  曲线从1个波峰转变为2个波峰,呈现分岔现象,影响了系统的稳定性。当  $\lambda_{21}$  和  $\lambda_{22}$  为0.25时,新型惯容 NES 的  $\rho(X'_2)$  曲线从2个波峰变为1个波峰,随机分岔现象消失。因此,可适当提高  $\lambda_{21}$  和  $\lambda_{22}$ ,以提高系统的减振性能。

3)  $\mu$  变化时,系统减振性能先增强后减弱。当  $\mu=[0.05, 0.5]$  时,惯质比存在最优值。当  $\mu > 0.1$  时,系统概率密度曲线从2个波峰变为3个波峰,出现随机分岔现象,系统不稳定性增加。因此,建议最佳惯质比保持在0.1以下。以主系统稳态位移均方根值的最小值为目标函数,采用差分进化算法优化了新型惯容 NES 参数。经优化处理后,最佳参数下的减振效果好于优化前。

## 参 考 文 献

- [1] SU M B, RONG H W. Resonance response of a single-degree-of-freedom nonlinear vibro-impact system to a narrow-band random parametric excitation[J]. Chinese Physics B, 2011, 20(6): 060501.
- [2] STAROSVETSKY Y, GENDELMAN O V. Response regimes in forced system with non-linear energy sink: quasi-periodic and random forcing[J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 64(1): 177-195.
- [3] LI J M, LU Z Q, CHEN L Q. An investigation on nonlinear-damping and nonlinear-stiffness vibration isolation systems under random excitations[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2017, 38(6): 613-621.
- [4] XUE J, ZHANG Y, DING H, et al. Vibration reduction evaluation of a linear system with a nonlinear energy sink under a harmonic and random excitation[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2020, 41(1): 1-14.
- [5] 薛继仁, 陈立群, 张业伟, 等. 单自由度 NES 在高斯白噪声随机激励下的响应分析[J]. 振动与冲击, 2020, 39(12): 235-241.
- [6] XUE Jiren, CHEN Liqun, ZHANG Yewei, et al. Response analysis of single degree of freedom NES under random excitation of Gaussian white noise[J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(12): 235-241. (in Chinese)
- [7] 刘良坤, 谭平, 闫维明, 等. 一种新型惯容减震器的设计及减震效果研究[J]. 振动与冲击, 2018, 37(15): 156-163, 170.
- [8] LIU Liangkun, TAN Ping, YAN Weiming, et al. Design of a novel inerter damper and its aseismic effect under earthquake[J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37(15): 156-163, 170. (in Chinese)
- [9] 王孝然, 申永军, 杨绍普, 等. 含负刚度元件的三要素型动力吸振器的参数优化[J]. 振动工程学报, 2017, 30(2): 177-184.
- [10] WANG Xiaoran, SHEN Yongjun, YANG Shaopu, et al. Parameter optimization of three-element type dynamic vibration absorber with negative stiffness[J]. Journal of Vibration Engineering, 2017, 30(2): 177-184. (in Chinese)
- [11] 吴子英, 朱荣贤, 姜东贵, 等. 混联 II 型惯容非线性能量阱的动力学特性研究[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(7): 907-921.
- [12] WU Ziyang, ZHU Rongxian, JIANG Donggui, et al. Research on dynamic characteristics of serial-parallel-II inerter nonlinear energy sink[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2024, 45(7): 907-921. (in Chinese)
- [13] WU Z, HARNE R L, WANG K W. Energy harvester synthesis via coupled linear-bistable system with multi-stable dynamics[J]. Journal of Applied Mechanics, 2014, 81(6): 061005.
- [14] 朱荣贤. 混联 II 型惯容非线性能量阱的减振特性研究[D]. 西安: 西安理工大学, 2024.
- [15] GOURDON E, ALEXANDER N A, TAYLOR C A, et al. Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling: theoretical and experimental results[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 300(3/4/5): 522-551.
- [16] HUANG Z L, ZHU W Q, SUZUKI Y. Stochastic averaging of strongly non-linear oscillators under combined harmonic and white-noise excitations [J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 238(2): 233-256.



第一作者简介: 吴子英, 男, 1975年7月生, 博士, 副教授。主要研究方向为机电系统动力学理论和非线性振动能量捕获理论。曾发表《三稳态电磁式涡激振动俘能装置发电性能研究》(《振动与冲击》2022年第45卷第13期)等论文。  
E-mail: ziyangwu@163.com