

含拓扑修形人字齿轮系统非线性分岔特性分析*

董 皓^{1,2}, 毕 越^{1,2}, 刘升升^{1,2}, 吕鑫龙^{1,2}, 韩 灏^{1,2},
侯祥颖^{3,4}, 靳广虎^{3,4}

(1. 西安工业大学机电工程学院 西安, 710021)

(2. 西安工业大学高端齿轮传动数智化陕西省高校工程研究中心 西安, 710021)

(3. 南京航空航天大学机电学院 南京, 210016) (4. 南京航空航天大学直升机动力学全国重点实验室 南京, 210016)

摘要 针对人字齿轮系统运行中普遍存在的非线性振动与分岔问题, 首先, 笔者基于集中参数法, 构建融合拓扑修形效应、时变啮合刚度与齿侧间隙影响的 24 自由度弯-扭-轴-摆耦合动力学模型; 其次, 基于势能法精确建立含拓扑修形的人字齿轮时变啮合刚度模型, 揭示修形对啮合刚度演化规律的深层机制; 最后, 采用龙格库塔法求解方程, 结合分岔图、时域响应、频域特性、相平面轨迹及庞加莱截面, 深入分析拓扑修形对系统分岔演化与混沌特性的影响。结果表明: 拓扑修形后, 系统振动与分岔特性的基本演化规律保持一致, 局部分岔行为和振动响应得到有效改善; 随着齿侧间隙增大, 系统分岔特性呈现单周期、倍周期至混沌的演变趋势, 在拓扑修形作用下, 部分混沌解转变为周期解, 整体混沌区域明显减少。理论结果与试验数据一致性较好, 研究成果为高性能人字齿轮系统的动力学优化与振动控制提供了重要参考。

关键词 人字齿; 拓扑修形; 时变啮合刚度; 非线性; 分岔特性

中图分类号 TH132.4

引 言

人字齿轮传动系统在实际运行中, 由于齿侧间隙、制造与装配误差等因素的影响, 常产生较大的噪声与振动。这不仅影响传动系统的平稳性和使用寿命, 还制约了其性能的进一步提升。因此, 降低人字齿轮传动系统运行过程中的噪声与振动, 已成为该领域研究的重要方向之一。

Arian 等^[1]研究了齿侧间隙、时变啮合刚度和静态传动误差对含惰轮的行星齿轮系统的混沌特性影响。卜忠颖等^[2]研究了风电行星齿轮箱的齿轮微观修形设计与试验。Hu 等^[3]研究了面齿轮转子系统的耦合多体动力学, 并探讨了载荷和齿侧间隙对系统动力响应的影响。Hao 等^[4]建立了人字齿轮副的非线性动力学模型, 并验证了模型的正确性。Hu 等^[5]建立了直齿轮传动系统的非线性摩擦动力学模型, 揭示了润滑条件对系统非线性行为的影响。刘杰等^[6]探讨了动态侧隙、时变啮合刚度、齿轮偏心等因素对单对齿轮系统非线性特性的影响。Li 等^[7]提

出了一种结合润滑模型与扭转动力学模型的直齿轮副动力学模型。Akamoto 等^[8]认为齿轮传动系统的振动主要源于扭转力, 并定量解释了齿轮传动系统的振动特性。刘辉等^[9]研究了间隙、啮合角等非线性质因素对单排行星直齿轮非线性特性的影响。

Litvin 等^[10]开发了一种改进斜齿轮新拓扑修形结构。Zou 等^[11]提出了一种基于重合度的拓扑修形改进算法, 并验证了该方法的优越性。Wang^[12]提出了一种针对人字齿轮副传动特性的三维修形方法, 优化了齿廓与齿向修形参数。张鑫等^[13]计算了齿轮啮合的错位量以及齿廓接触线的变形量, 进而实施了修形。Lin 等^[14]基于势能法和数值积分法, 计算了修形后人字齿轮的时变啮合刚度。

综上所述, 现有工作主要集中在分析各类非线性条件对直齿轮和斜齿轮系统非线性动力学特性的影响, 在多自由度状态下的动力学建模方面的研究仍不够完善。同时, 针对拓扑修形等非线性参数对人字齿轮传动系统分岔特性影响的研究仍较为有限, 相关理论与应用亟待进一步深入研究。

* 国家自然科学基金资助项目(52375062); 直升机动力学全国重点实验室开放基金资助项目(2024-ZSJ-LB-03-01); 陕西省教育厅科研计划资助项目(23JC038); 西安市科技计划资助项目(23GXFW0037)

收稿日期: 2025-04-27; 修回日期: 2025-05-19

基于现有研究中的不足,笔者构建一个24自由度弯-扭-轴-摆耦合人字齿轮动力学模型,综合考虑拓扑修形、时变啮合刚度和齿侧间隙等因素。采用势能法与切片法,考虑轴向力和径向力对刚度的影响,并精确计算修形齿轮的时变啮合刚度。通过分岔图、时域图等方法,研究系统的分岔行为和振动特性,旨在揭示拓扑修形对系统动力学的影响,为人字齿轮系统的设计与优化提供新的理论依据。

1 弯-扭-轴-摆动力学模型建立

采用集中参数法建立人字齿轮副弯-扭-轴-摆耦合的动力学模型。应用文献[15]中梁单元理论对人字齿轮退刀槽进行等效建模,并结合2个斜齿轮副,构建了如图1所示的弯-扭-轴-摆动力学模型示意图。模型中,符号L和R用于区分左侧斜齿轮副与右侧斜齿轮副,s代表主动轮,p代表从动轮。

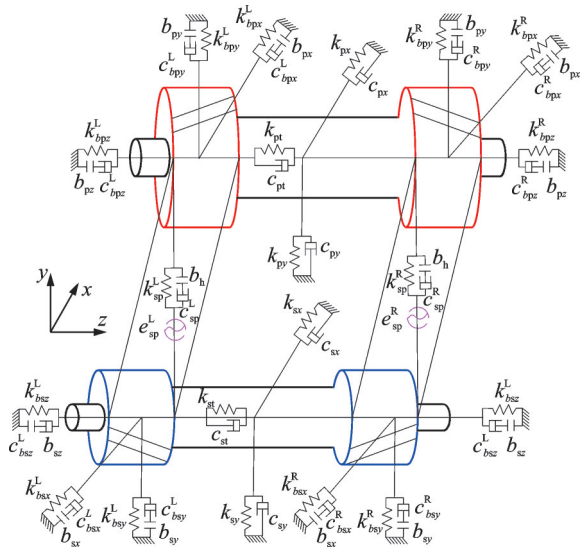


图1 弯-扭-轴-摆动力学模型示意图

Fig.1 Schematic diagram of bending torsion axis pendulum dynamic model

各轮的啮合方向的非线性因素包括时变啮合刚度 k_{sp} 、啮合阻尼 c_{sp} 和啮合误差 e_{sp} 以及齿侧间隙 b_h 、支撑刚度 k_{ju} 、支撑阻尼 c_{ju} 、支撑间隙 b_{ju} 。齿轮中间轴段含扭转刚度 k_{ju} 和扭转阻尼 c_{ju} (j 为 s 或 p , 代表主动轮或从动轮; u 为 x 轴、 y 轴、 z 轴)。

系统各自由度方向上的动力学微分方程中,左侧主动轮动力学微分方程为

$$\begin{cases} m_s^L \ddot{x}_s^L = -(F_{sp}^L \cos \beta \sin \phi + k_{bsx}^L x_s^L + c_{bsx}^L \dot{x}_s^L + \\ k_{sx}^L (x_s^L - x_s^R) + c_{sx}^L (\dot{x}_s^L - \dot{x}_s^R)) - F_{fsx}^L \\ m_s^L \ddot{y}_s^L = -(F_{sp}^L \cos \beta \cos \phi + k_{bsy}^L y_s^L + c_{bsy}^L \dot{y}_s^L + \\ k_{sy}^L (y_s^L - y_s^R) + c_{sy}^L (\dot{y}_s^L - \dot{y}_s^R)) + F_{fsy}^L \\ m_s^L \ddot{z}_s^L = -F_{sp}^L \sin \beta - k_{bsz}^L z_s^L - c_{bsz}^L \dot{z}_s^L - \\ k_{sz}^L (z_s^L - z_s^R) - c_{sz}^L (\dot{z}_s^L - \dot{z}_s^R) \\ I_s^L \ddot{\theta}_{zs}^L = -(F_{sp}^L r_{bs} \sin \beta \cos \phi + k_{st}^L (\theta_{zs}^L - \theta_{zs}^R) + \\ c_{st}^L (\dot{\theta}_{zs}^L - \dot{\theta}_{zs}^R)) + T_1/2 \\ I_s^L \ddot{\theta}_{xs}^L = -(F_{sp}^L r_{bs} \sin \beta \sin \phi + k_{st}^L (\theta_{xs}^L - \theta_{xs}^R) + \\ c_{st}^L (\dot{\theta}_{xs}^L - \dot{\theta}_{xs}^R)) - T_{fsx}^L \\ I_s^L \ddot{\theta}_{ys}^L = -(F_{sp}^L r_{bs} \sin \beta \cos \phi + k_{st}^L (\theta_{ys}^L - \theta_{ys}^R) + \\ c_{st}^L (\dot{\theta}_{ys}^L - \dot{\theta}_{ys}^R)) + T_{fsy}^L \end{cases} \quad (1)$$

右侧主动轮动力学微分方程为

$$\begin{cases} m_s^R \ddot{x}_s^R = -(F_{sp}^R \cos \beta \sin \phi + k_{bsx}^R x_s^R + c_{bsx}^R \dot{x}_s^R + \\ k_{sx}^R (x_s^L - x_s^R) + c_{sx}^R (\dot{x}_s^L - \dot{x}_s^R)) - F_{fsx}^R \\ m_s^R \ddot{y}_s^R = -(F_{sp}^R \cos \beta \sin \phi + k_{bsy}^R y_s^R + c_{bsy}^R \dot{y}_s^R + \\ k_{sy}^R (y_s^L - y_s^R) + c_{sy}^R (\dot{y}_s^L - \dot{y}_s^R)) + F_{fsy}^R \\ m_s^R \ddot{z}_s^R = -F_{sp}^R \sin \beta - k_{bsz}^R z_s^R - c_{bsz}^R \dot{z}_s^R - \\ k_{sz}^R (z_s^L - z_s^R) - c_{sz}^R (\dot{z}_s^L - \dot{z}_s^R) \\ I_s^R \ddot{\theta}_{zs}^R = -(F_{sp}^R r_{bs} \sin \beta \cos \phi + k_{st}^R (\theta_{zs}^L - \theta_{zs}^R) + \\ c_{st}^R (\dot{\theta}_{zs}^L - \dot{\theta}_{zs}^R)) + T_1/2 \\ I_s^R \ddot{\theta}_{xs}^R = -(F_{sp}^R r_{bs} \sin \beta \sin \phi + k_{st}^R (\theta_{xs}^L - \theta_{xs}^R) + \\ c_{st}^R (\dot{\theta}_{xs}^L - \dot{\theta}_{xs}^R)) - T_{fsx}^R \\ I_s^R \ddot{\theta}_{ys}^R = -(F_{sp}^R r_{bs} \sin \beta \cos \phi + k_{st}^R (\theta_{ys}^L - \theta_{ys}^R) + \\ c_{st}^R (\dot{\theta}_{ys}^L - \dot{\theta}_{ys}^R)) + T_{fsy}^R \end{cases} \quad (2)$$

左侧从动轮动力学微分方程为

$$\begin{cases} m_p^L \ddot{x}_p^L = F_{sp}^L \cos \beta \sin \phi - k_{bps}^L x_p^L - c_{bps}^L \dot{x}_p^L - \\ k_{px}^L (x_p^L - x_p^R) - c_{px}^L (\dot{x}_p^L - \dot{x}_p^R) + F_{fpx}^L \\ m_p^L \ddot{y}_p^L = F_{sp}^L \cos \beta \sin \phi - k_{bpy}^L y_p^L - c_{bpy}^L \dot{y}_p^L - \\ k_{py}^L (y_p^L - y_p^R) - c_{py}^L (\dot{y}_p^L - \dot{y}_p^R) - F_{fpy}^L \\ m_p^L \ddot{z}_p^L = -F_{sp}^L \sin \beta - k_{bpz}^L z_p^L - c_{bpz}^L \dot{z}_p^L - \\ k_{pz}^L (z_p^L - z_p^R) - c_{pz}^L (\dot{z}_p^L - \dot{z}_p^R) \\ I_p^L \ddot{\theta}_{zp}^L = F_{sp}^L r_{bp} \sin \beta \cos \phi - k_{pt}^L (\theta_{zp}^L - \theta_{zp}^R) - \\ c_{pt}^L (\dot{\theta}_{zp}^L - \dot{\theta}_{zp}^R) - T_2/2 \\ I_p^L \ddot{\theta}_{xp}^L = F_{sp}^L r_{bp} \sin \beta \sin \phi - k_{pt}^L (\theta_{xp}^L - \theta_{xp}^R) - \\ c_{pt}^L (\dot{\theta}_{xp}^L - \dot{\theta}_{xp}^R) + T_{fpx}^L \\ I_p^L \ddot{\theta}_{yp}^L = F_{sp}^L r_{bp} \sin \beta \cos \phi - k_{pt}^L (\theta_{yp}^L - \theta_{yp}^R) - \\ c_{pt}^L (\dot{\theta}_{yp}^L - \dot{\theta}_{yp}^R) - T_{fpy}^L \end{cases} \quad (3)$$

右侧从动轮动力学微分方程为

$$\begin{cases}
m_p^R \ddot{x}_p^R = F_{sp}^R \cos \beta \sin \psi - k_{bpx}^R x_p^R - c_{bpx}^R \dot{x}_p^R - \\
\quad k_{px}^R (x_p^L - x_p^R) - c_{px}^R (\dot{x}_p^L - \dot{x}_p^R) + F_{fpx}^R \\
m_p^R \ddot{y}_p^R = F_{sp}^R \cos \beta \sin \psi - k_{bpy}^R y_p^R - c_{bpy}^R \dot{y}_p^R - \\
\quad k_{py}^R (y_p^L - y_p^R) - c_{py}^R (\dot{y}_p^L - \dot{y}_p^R) - F_{fpy}^R \\
m_p^R \ddot{z}_p^R = -F_{sp}^R \sin \beta - k_{bpz}^R z_p^R - c_{bpz}^R \dot{z}_p^R - \\
\quad k_{pz}^R (z_p^L - z_p^R) - c_{pz}^R (\dot{z}_p^L - \dot{z}_p^R) \\
I_p^R \ddot{\theta}_{sp}^R = F_{sp}^R r_{bp} \sin \beta \cos \psi - k_{pt}^R (\theta_{sp}^L - \theta_{sp}^R) - \\
\quad c_{pt}^R (\dot{\theta}_{sp}^L - \dot{\theta}_{sp}^R) - T_2/2 \\
I_p^R \ddot{\theta}_{xp}^R = F_{sp}^R r_{bp} \sin \beta \sin \psi - k_{pt}^R (\theta_{xp}^L - \theta_{xp}^R) - \\
\quad c_{pt}^R (\dot{\theta}_{xp}^L - \dot{\theta}_{xp}^R) - T_{fpx}^R \\
I_p^R \ddot{\theta}_{yp}^R = F_{sp}^R r_{bp} \sin \beta \cos \psi - k_{pt}^R (\theta_{yp}^L - \theta_{yp}^R) - \\
\quad c_{pt}^R (\dot{\theta}_{yp}^L - \dot{\theta}_{yp}^R) + T_{fpy}^R
\end{cases} \quad (4)$$

其中: β 为螺旋角; I 为构件转动惯量; m 为构件质量; ψ 为位置角; T_f 为摩擦力臂; F_f 为摩擦力; $\ddot{x}$ 、 $\ddot{y}$ 、 $\ddot{z}$ 分别表示 x 轴、 y 轴、 z 轴方向的加速度。

F_{sp}^i 啮合力的表达式为

$$F_{sp}^i = k_{sp}^i f(\delta_{sp}^i, b_h) + c_{sp}^i \dot{\delta}_{sp}^i \quad (5)$$

其中: i 为 L 或 R。

δ_{sp}^i 为啮合线位移, 其表达式为

$$\begin{aligned}
\delta_{sp}^i = & (x_s^i \sin \psi + y_s^i \cos \psi - x_p^i \sin \psi - y_p^i \cos \psi + \\
& r_{bs} \theta_{zs}^i + r_{bp} \theta_{zp}^i) \cos \beta + (r_{bs} \theta_{xs}^i \sin \psi + \\
& r_{bs} \theta_{ys}^i \cos \psi + r_{bp} \theta_{xp}^i \sin \psi + r_{bp} \theta_{yp}^i \cos \psi - \\
& z_s^i + z_p^i) \sin \beta - e_{sp}^i
\end{aligned} \quad (6)$$

其中: e_{sp}^i 为齿轮副综合啮合误差。

齿轮副的齿侧间隙与支撑间隙非线性函数为

$$f(\delta_{ju}^i) = \begin{cases} \delta_{ju}^i + b_h & (\delta_{ju}^i > b_h) \\ 0 & (b_h \leq \delta_{ju}^i \leq -b_h) \\ \delta_{ju}^i - b_h & (\delta_{ju}^i < -b_h) \end{cases} \quad (7)$$

$$f(x_{ju}^i) = \begin{cases} x_{ju}^i + b_{ju} & (x_{ju}^i > b_{ju}) \\ 0 & (-b_{ju} \leq x_{ju}^i \leq b_{ju}) \\ x_{ju}^i - b_{ju} & (x_{ju}^i < -b_{ju}) \end{cases} \quad (8)$$

其中: δ_{ju}^i 为人字齿啮合线位移, x_{ju}^i 为人字齿振动位移。

为便于比较与分析, 引入无量纲时间 $\tau = \omega_1 t$ 和位移标称尺度 $\lambda = 1 \times 10^{-5}$, 并令 $\Omega = \omega / \omega_1$, 系统固有频率为

$$\omega_1 = \sqrt{k_{sp}^i / (1/m_s + 1/m_p)} \quad (9)$$

其他无量纲物理量的定义表达式为 $\bar{x}(\tau) = x/\lambda$; $\dot{\bar{x}}(\tau) = \dot{x}/(\lambda\omega_1)$; $\ddot{\bar{x}}(\tau) = \ddot{x}/(\lambda\omega_1^2)$; $\bar{e}(\tau) = e/\lambda$; $\dot{\bar{e}}(\tau) = \dot{e}/(\lambda\omega_1)$; $\ddot{\bar{e}}(\tau) = \ddot{e}/(\lambda\omega_1^2)$; $\bar{c} = c/\omega_1$; $\bar{k} = k/\omega_1^2$; $\bar{T} = T/(\lambda\omega_1^2)$; $\bar{b} = b_h/\omega_1$ 。

2 含拓扑修形的时变啮合刚度计算

图2为拓扑修形齿面示意图, 拓扑修形将渐开线齿面分为9个区域(见图数字序号)。具体划分为: 区域1为未修形的渐开线齿; 区域3和区域7为仅需齿廓修形的部分; 区域5和区域9为仅需齿向修形的部分; 区域2和区域4需要同时进行齿顶修形和齿向修形; 区域6和区域8则需同时进行齿根修形和齿向修形。图中: S_1 为理论渐开线齿面, S_2 为拓扑修形齿面。 v 、 v_d 、 v_g 和 v_a 分别为齿廓修形边界曲线 E 、 D 、 C 、 F 处渐开线的展角。 θ_0 、 θ_a 、 θ_b 与 $\theta_{\max}$ 分别为齿向修形边界曲线 H 、 A 、 G 、 J 处的渐开线展角。

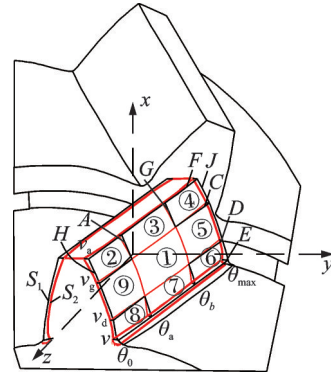


图2 拓扑修形齿面示意图

Fig.2 Diagram of topologically modified tooth surface

采用积分方法将人字齿轮沿齿宽方向切割成若干薄片, 人字齿轮切片模型如图3所示。通过计算各薄片的法向力与变形比获得单齿刚度, 再积分求得整体时变啮合刚度。图中 B 为人字齿轮一侧的宽度, n 为单个切片的宽度。

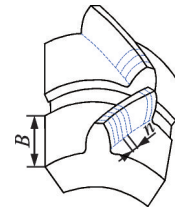


图3 人字齿轮切片模型

Fig.3 Slice model of herringbone gear

在计算人字齿轮的时变啮合刚度时, 综合考虑轮齿在径向力作用下的接触、弯曲、剪切、基体以及径向压缩刚度。由于人字齿轮具有螺旋角, 还需考虑由轴向力引起的弯曲和剪切势能。因此, 第 k 个薄片的啮合刚度 k_k 可表示为

$$k_k = 1 / \left(\frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{qj}} + \frac{1}{k_{ej}} + \frac{1}{k_{aj}} + \frac{1}{k_{tj}} + \frac{1}{k_{asj}} + \frac{1}{k_{abj}} \right) \quad (10)$$

其中: k_h 、 k_φ 、 k_ϵ 、 k_a 、 k_γ 、 k_b 、 k_{as} 分别为赫兹刚度、弯曲刚度、剪切刚度、径向压缩刚度、基体刚度、轴向力引起的弯曲刚度、轴向力引起的剪切刚度。

总的啮合刚度为

$$k = \sum_{k=1}^{\zeta} k_k \quad (11)$$

其中: ζ 为轮齿的切片数。

齿轮修形通过改变齿面轮廓, 进而影响轮齿的惯性矩和截面面积。影响轮齿惯性矩和截面面积的关键参数是啮合点到轮齿中线的距离 H_0 。采用切片法后, 每一片齿轮可视为一个悬臂梁模型, 图4为轮齿截面悬臂梁模型。图中: r_ξ 为任意圆半径; r_a 为齿顶圆半径; r_o 为基圆半径; r 为齿根圆半径。

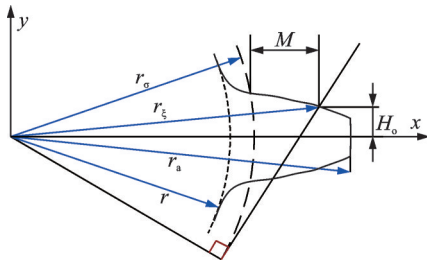


图4 轮齿截面悬臂梁模型

Fig.4 Cantilever beam model with gear tooth cross-section

拓扑修形对齿廓进行分段修形, 将渐开线齿廓分为3段进行修形。因此, 在齿廓修形下, H_0 变为3段, 在不同区域的 H_0 不同, 记为 H'_0 , 即

$$H'_0 = \begin{cases} r_1 \cos\left(\frac{P}{2r_1}\right) - \frac{\Delta l}{W_3^2} [r_1 - (r_o + W_3)]^2 & (r_o \leq r_1 \leq r_o + W_3) \\ r_1 \cos\left(\frac{P}{2r_\mu}\right) & (r_o + W_3 \leq r_1 \leq r_o - W_4) \\ r_1 \cos\left(\frac{P}{2r_\mu}\right) - \frac{\Delta l}{W_4^2} [r_1 - (r_a - W_4)]^2 & (r_a + W_4 \leq r_1 \leq r_a) \end{cases} \quad (12)$$

其中: P 为任意圆齿厚; W_3 、 W_4 分别为齿顶和齿根的修形长度; Δl 为齿廓修形量。

在齿宽方向, 进行齿向修形后, H_0 再次发生变化, 记为 H''_0 , 即 $H''_0 = H'_0 - V_0$ 。则拓扑修形后的惯性矩和截面面积为

$$\begin{cases} I_o = (2H''_0)^3 n / 12 \\ N_o = 2H''_0 n \end{cases} \quad (13)$$

根据材料力学和弹性力学的相关理论, 本研究中, 由齿轮变形产生的弯曲势能为 $U_\varphi = \frac{F^2}{2k_\varphi} =$

$\int_0^M \frac{[F_1(M-x) - F_1 H_0'']^2}{2EI_o} dx$; 剪切势能为 $U_\epsilon = \frac{F^2}{2k_\epsilon} = \int_0^M \frac{1.2F_1^2}{2KN_o} dx$; 径向压缩势能为 $U_a = \frac{F^2}{2k_a} = \int_0^M \frac{F_1^2}{2EN_o} dx$; 由轴向力引起的弯曲势能为 $U_b = \frac{F^2}{2k_b} = \int_0^M \frac{[F_1(M-x) - F_1 H_0'']^2}{EI_o} dx$; 由轴向力引起的剪切势能为 $U_{as} = \frac{F^2}{2k_{as}} = \int_0^M \frac{1.2F_a^2}{KN_o} dx$; 赫兹势能为 $U_h = \frac{F^2}{2k_h}$ 。其中: F 为啮合力; F_1 为径向力; F_t 为圆周力; F_a 为轴向力; K 为剪切模量; M 为啮合点到基圆的距离。

然而, 齿轮轮体变形引起的啮合线上的等效刚度(即基体刚度)是不可忽视的, 其计算公式为

$$k_\gamma = \frac{\chi \kappa}{\left\{ \cos^2 \alpha \left[\nu \left(\frac{w}{\eta} \right)^2 + q \left(\frac{w}{\eta} \right) + \rho (1 + Q \tan^2 \alpha) \right] \right\}} \quad (14)$$

其中: χ 弹性模量; κ 为齿宽; α 为压力角; ν 、 q 、 Q 、 ρ 、 w 与 η 为系数, 计算方式见文献[14]。

齿廓修形最大修形量 $\Delta_{\max}$ 及齿廓修形长度 l 为

$$\begin{cases} \Delta_{\max} = \frac{\zeta F_1 / \nu}{\epsilon_1 k} \\ l = 0.6 G_1 \end{cases} \quad (15)$$

其中: ζ 为使用系数; ϵ_1 为端面重合度; k 为轮齿刚度。

齿向修形时, 主要考虑原齿轮啮合齿廓误差因子下的鼓形修形量, 其计算公式为

$$\partial = 0.5e \quad (16)$$

其中: ∂ 为齿廓修正量; e 为原齿啮合误差。

经计算, 修形参数如表1所示。

表1 修形参数

Tab.1 Modification parameters

修形参数	数值
ζ	1.25
F_1/N	19 318.5
ν/mm	45
ϵ_1	1.562
$e/(\text{N} \cdot \mu\text{m}^{-1})$	34.337
$\Delta_{\max}/\mu\text{m}$	10
l/mm	1.2
$\partial/\mu\text{m}$	10

表2为人字齿轮参数, 以此参数条件对小齿轮进行修形, 并计算修形前后单齿啮合刚度及时变啮合刚度, 得到的时变啮合刚度曲线如图5所示。拓

扑修形后,整个区域的时变啮合刚度普遍减小。尤其是在单对齿啮合时,时变啮合刚度显著降低,且与未修形时相比,整体更为平稳。在拓扑修形的条件下,时变啮合刚度的变化更为明显。未修形时的幅值为 3.64×10^8 N/m,修形后减少至 3.53×10^8 N/m,降幅为3.02%。

表2 人字齿轮参数

Tab.2 Parameters of herringbone gear

参数	主动轮	从动轮
齿数	25	75
模数	2	2
螺旋角	15	15
压力角/(°)	20	20
齿宽/mm	45	45
泊松比	0.3	0.3
弹性模量/Pa	2.1×10^{11}	2.1×10^{11}
密度/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	7 850	7 850
齿廓修形/ μm	20	0
齿向修形/ μm	10	0
齿廓修形长度/mm	1.2	0

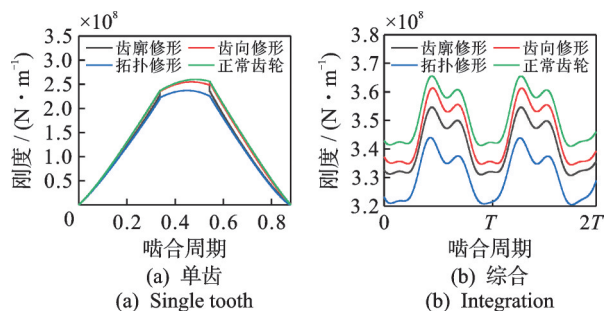


图5 时变啮合刚度曲线图

Fig.5 Time varying mesh stiffness curve

3 分岔特性算例分析

3.1 未修形系统

图6为未修形单对人字齿轮副随齿侧间隙变化的分岔特性,即人字齿轮副在转速 $\omega=2\,400$ r/min、阻尼系数 $\lambda=0.05$ 、摩擦因数 $\mu=0.2$ 、各方向支撑间隙均为 $10\,\mu\text{m}$ 时,拓扑修形前人字齿轮副啮合线无量纲相对位移随 b_h 变化的分岔图。随着齿侧间隙增大,系统动态行为呈现7个阶段演变: $b_h < 5.3\,\mu\text{m}$ 时为单倍周期稳定态; $b_h = 5.3 \sim 6.15\,\mu\text{m}$ 时转为3倍周期; $b_h = 6.15 \sim 7.20\,\mu\text{m}$ 时恢复单倍周期; $b_h = 7.20 \sim 10.9\,\mu\text{m}$ 时分岔为2倍周期; $b_h = 10.9 \sim 14.2\,\mu\text{m}$ 时演变为4倍周期; $b_h = 14.2 \sim 16.2\,\mu\text{m}$ 时以2倍周期为主,伴有随机非周期点; $b_h > 16.2\,\mu\text{m}$ 时进入持续混沌状态,此时系统持续表现出混沌行为,系统出现不稳定性和随机性。

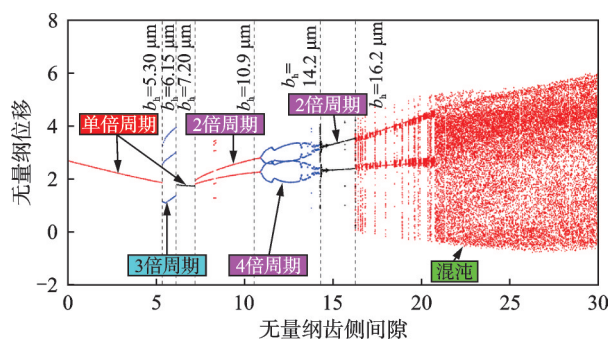


图6 未修形单对人字齿轮副随齿侧间隙变化的分岔特性

Fig.6 Bifurcation characteristics of unmodified single pair herringbone gear pairs with changes in tooth flank clearance

未修形系统相对位移振动特性如图7所示。图7(a)中,当 $b_h=8.0\,\mu\text{m}$ 时,时域图振动幅值平稳;频域图中包含啮合频率 f 及 $1/2f$;由相平面图及庞加莱图显示,系统呈2倍周期运动状态。图7(b)中,当 $b_h=16.4\,\mu\text{m}$ 时,时域图振动出现剧烈波动,频域

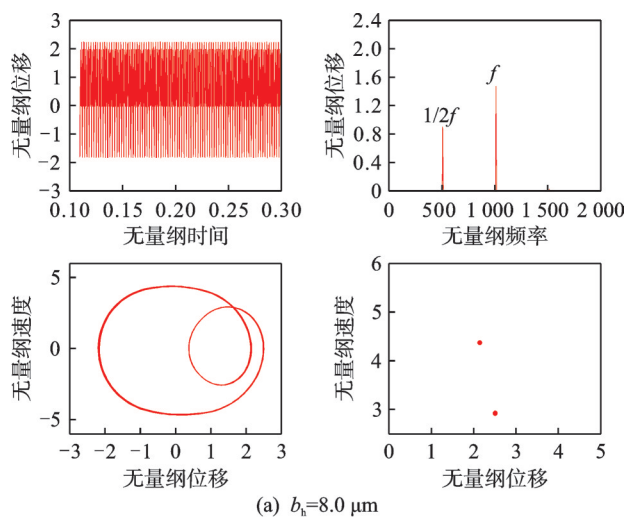
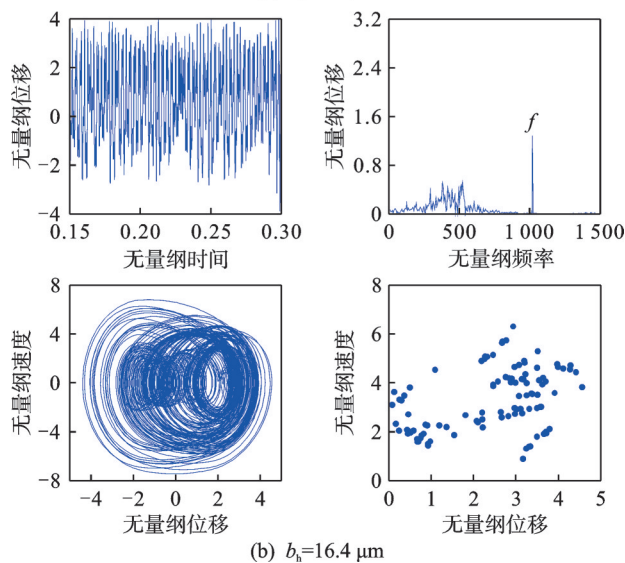
(a) $b_h=8.0\,\mu\text{m}$ (b) $b_h=16.4\,\mu\text{m}$

图7 未修形系统相对位移振动特性

Fig.7 Relative displacement vibration characteristics of unmodified system

图出现大量边频带;相平面图呈无序状态,庞加莱图包含多个离散的点,表明系统进入混沌状态。

3.2 拓扑修形系统

图8为含修形单对人字齿轮副随齿侧间隙变化的分岔特性,展示了人字齿轮副在转速 $\omega=2\,400\text{ r/min}$ 、阻尼系数 $\zeta=0.05$ 、摩擦因数 $\mu=0.2$ 、各方向支撑间隙均为 $10\text{ }\mu\text{m}$ 时,拓扑修形后人字齿轮副的啮合线无量纲相对位移随 b_h 变化的分岔图。拓扑修形后人字齿轮副的分岔特性呈现7个典型阶段: $b_h<5.25\text{ }\mu\text{m}$ 时为单倍周期稳定态; $b_h=5.25\sim 6.15\text{ }\mu\text{m}$ 时转为3倍周期; $b_h=6.15\sim 7.20\text{ }\mu\text{m}$ 时恢复单倍周期; $b_h=7.1\sim 10.9\text{ }\mu\text{m}$ 时进入2倍周期; $b_h=10.9\sim 14.4\text{ }\mu\text{m}$ 时过渡到4倍周期,并伴随混沌现象; $b_h=14.2\sim 16.85\text{ }\mu\text{m}$ 时呈现混沌与2倍周期交替状态; $b_h>16.85\text{ }\mu\text{m}$ 时持续处于混沌状态,表现出显著的不稳定性和随机性。

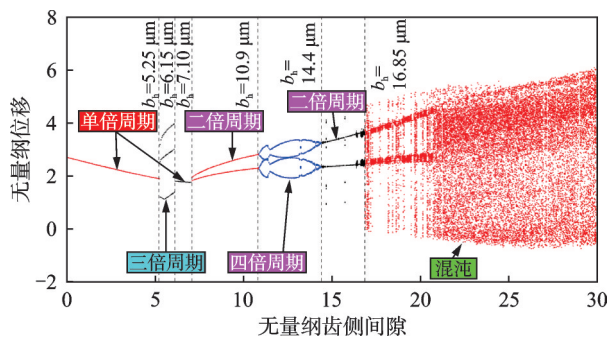


图8 含修形单对人字齿轮副随齿侧间隙变化的分岔特性
Fig.8 Bifurcation characteristics of a single pair herringbone gear pairs with modified tooth flank clearance variation

修形后系统相对位移振动特性如图9所示。图9(a)中,当 $b_h=8\text{ }\mu\text{m}$ 时,振动响应的时域图稳定,主要包含啮合频率 f 及 $1/2f$,由相平面图及庞加莱图显示系统呈2倍周期运动状态。图9(b)中,当 $b_h=16.4\text{ }\mu\text{m}$ 时,时域图振动平稳,频域图无杂频,相平面图呈稳定状态,庞加莱图显示系统呈现2倍周期运动状态。

对比分析表明,拓扑修形显著提升了系统稳定性。当 $b_h=8.0\text{ }\mu\text{m}$ 时,时域幅值由 $2.18\sim 1.83\text{ }\mu\text{m}$ 降至 $1.49\sim 1.35\text{ }\mu\text{m}$,频域幅值减小,相平面轨迹圆缩小,庞加莱点更集中。当 $b_h=16.4\text{ }\mu\text{m}$ 时,时域从混沌状态($4.5\sim 4.4\text{ }\mu\text{m}$)转为周期运动($3.6\sim 3.6\text{ }\mu\text{m}$),频域连续谱变为清晰的 f 及 $1/2f$ 成分,相平面由无序圆环转为规则轨迹,庞加莱点从离散变为聚集。说明拓扑修形有效抑制了振动,增强了系统稳定性。

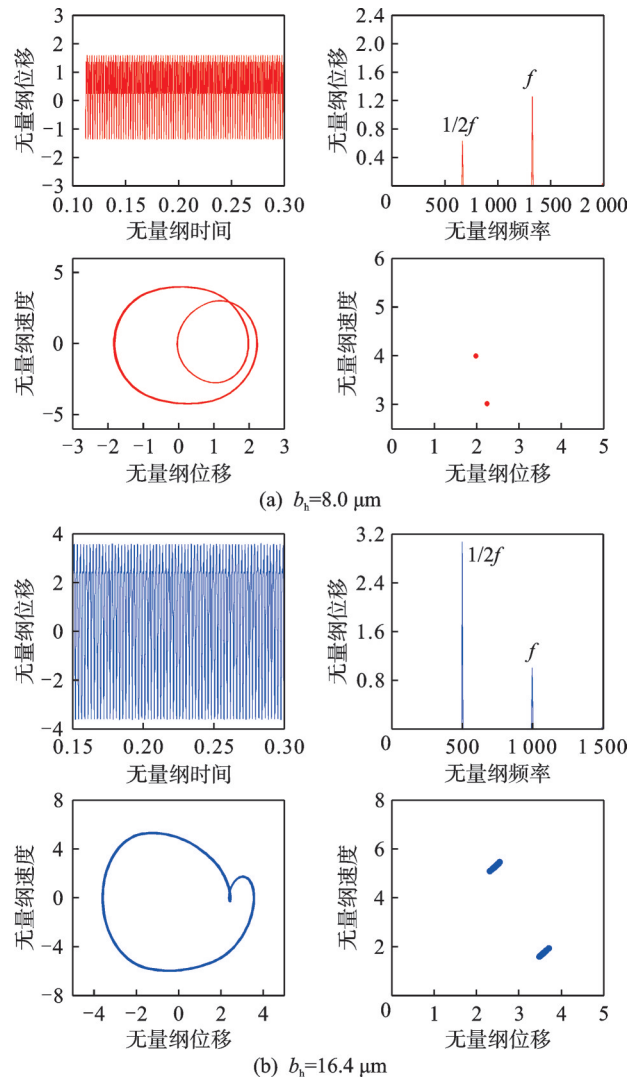


图9 修形后系统相对位移振动特性

Fig.9 Relative displacement vibration characteristics of the modified system

4 试验验证

图10为传动系统振动测试试验台,该试验台由电机、齿轮箱、传感器、磁粉制动器以及采集器组成。试验中设备参数如表3所示。

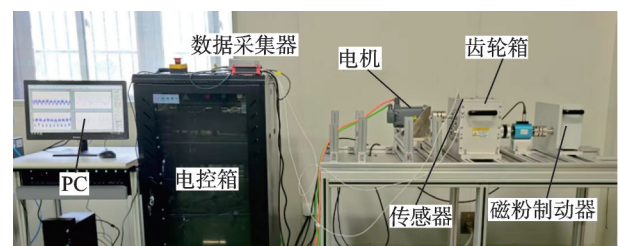


图10 传动系统振动测试试验台

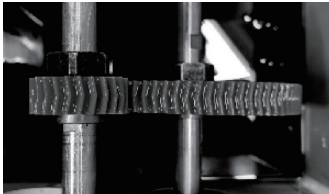
Fig.10 Transmission system vibration test bench

图11为设计搭建的齿轮箱及齿轮修形,试验修形对象为小齿轮,图中序号标记区域与图2中相同。

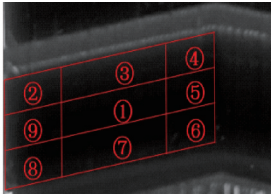
表 3 设备参数

Tab.3 Equipment parameters

名称	品牌	规格
电机	Abb 变频电机	SIMOTICS S-1FL6052-2AF
变频器	SIMOTICS	—
磁粉制动器	—	35 mm×15 mm×24 mm
数据采集器	优泰	uT3704FRS-ICP
传感器	Kistler	8704B50



(a) 齿轮箱内部结构图



(b) 齿轮修形图

(a) Internal structure of gearbox (b) Gear modification diagram

图 11 齿轮箱及齿轮修形

Fig.11 Gearbox and gear modification

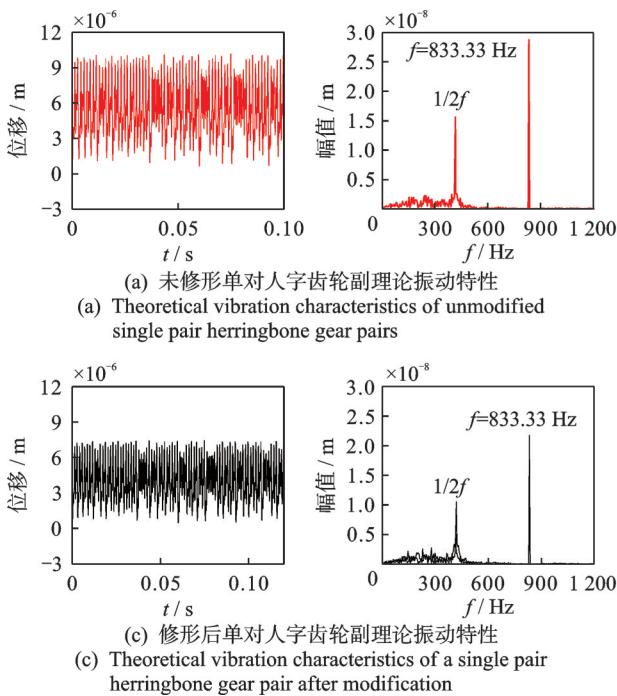


图 12 转速为 2 000 r/min 时系统振动响应

Fig.12 System vibration responses at 2 000 r/min

5 结 论

1) 建立了 24 自由度弯-扭-轴-摆耦合人字齿轮动力学模型,采用势能法计算修形齿轮的时变啮合刚度,分析了拓扑修形对系统分岔特性和动态响应的影响,并通过试验验证了模型的准确性。

2) 通过拓扑修形,有效降低了人字齿轮副的时变啮合刚度。在齿侧间隙变化的影响下,系统的整体运动趋势通常遵循由单周期到倍周期、再到混沌

转速为 2 000 r/min 时系统振动响应如图 12 所示,对比分析了未修形人字齿轮系统以及拓扑修形后系统的理论计算与试验振动特性。图 12(a)中,当转速为 2 000 r/min 时,未修形的系统理论振动出现了混乱的状态,时域响应幅值范围为 0.6~10.19 μm ;频域图中主要包含基频 f 和 $1/2f$,同时在 $1/2f$ 附近出现了较多的杂频。图 12(b)中,未修形时,时域响应范围为 -1.8~13.06 μm ;频域图中同样包含基频 f 和 $1/2f$,但低频区域出现了大量杂频。图 12(c)中,对主动轮进行拓扑修形后,系统的理论振动依然保持混乱的状态,时域响应幅值范围为 0.45~7.45 μm ;频域图中包含基频 f 和 $1/2f$ 及杂频。图 12(d)中,时域响应范围为 -1.47~12.45 μm ;频域图中包含基频 f 和 $1/2f$,同时也包含杂频。对比分析后发现,修形后的系统更加稳定。

的转变规律。拓扑修形后,尽管系统的分岔特性大体保持一致,但在某些区域,原本的混沌或拟周期状态被稳定的周期状态所取代,且分岔节点发生变化,整体混沌区域的占比从 46.0% 降至 43.8%。

3) 对比修形前后的动态响应,修形后系统的振动幅值显著减小,且边频带和低频成分明显减少或完全消失。本研究结果为人字齿轮传动系统的设计与优化提供了重要的理论依据。

参 考 文 献

- [1] ARIAN G, TAGHVAEI S. Dynamic analysis and chaos control of spur gear transmission system with idler [J]. *European Journal of Mechanics—A/Solids*, 2021, 87: 104229.
- [2] 卜忠颢, 刘林, 何录忠, 等. 风电齿轮箱行星轮系齿轮修形研究[J]. *内燃机与配件*, 2024(1): 45-48.
BU Zhongjie, LIU Lin, HE Luzhong, et al. Research on gear modification of planetary gear train in wind power gearbox[J]. *Internal Combustion Engine & Parts*, 2024(1): 45-48.(in Chinese)
- [3] HU Z, TANG J, CHEN S, et al. Coupled translation-rotation vibration and dynamic analysis of face geared rotor system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 351: 351282-351298.
- [4] HAO D, YUE B, BO W, et al. Bending-torsional-axial-pendular nonlinear dynamic modeling and frequency response analysis of a marine double-helical gear drive system considering backlash[J]. *Journal of Low Frequency Noise Vibration and Active Control*, 2022, 41(2): 519-539.
- [5] HU B, ZHOU C J, WANG H B, et al. Nonlinear tribo-dynamic model and experimental verification of a spur gear drive under loss-of-lubrication condition[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 153: 107509.
- [6] 刘杰, 赵伟强, 任望. 具有动态侧隙的齿轮传动系统动力响应分析[J]. *振动、测试与诊断*, 2020, 40(6): 1184-1190.
LIU Jie, ZHAO Weiqiang, REN Wang. Dynamic response analysis of gear transmission system with dynamic backlash[J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2020, 40(6): 1184-1190.(in Chinese)
- [7] LI Z F, ZHU C C, LIU H J, et al. Mesh stiffness and nonlinear dynamic response of a spur gear pair considering tribo-dynamic effect[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2020, 153: 103989.
- [8] AKAMOTO K, SAKAMOTO K. Theoretical analysis of nonlinear vibration characteristics of gear pair with shafts[J]. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2022, 12(2): 100324.
- [9] 刘辉, 张晨, 项昌乐, 等. 单级行星齿轮非线性动力学模型与试验验证[J]. *振动、测试与诊断*, 2017, 37(6): 1233-1241.
- LIU Hui, ZHANG Chen, XIANG Changle, et al. Study and experiment of nonlinear dynamics model of planetary gear[J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2017, 37(6): 1233-1241.(in Chinese)
- [10] LITVIN F L, GONZALEZ-PEREZ I, FUENTES A, et al. Topology of modified surfaces of involute helical gears with line contact developed for improvement of bearing contact, reduction of transmission errors, and stress analysis[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2005, 42(9/10): 1063-1078.
- [11] ZOU H R, WANG S M, LI F, et al. Improved algorithm of tooth surface topological modification and nonlinear dynamic analysis of herringbone gears[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2023, 180: 105151.
- [12] WANG C. Three-dimensional modification for vibration reduction and uniform load distribution focused on unique transmission characteristics of herringbone gear pairs[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2024, 210: 111153.
- [13] 张鑫, 刘欣荣. 基于齿轮系统啮合错位量的修形优化分析[J]. *机械传动*, 2022, 46(4): 95-100.
ZHANG Xin, LIU Xinrong. Modified optimization analysis based on gear system meshing misalignment [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2022, 46(4): 95-100.(in Chinese)
- [14] LIN T J, CHEN M H, YANG J. Calculation method of time-varying meshing stiffness of herringbone gear pair with tooth profile modification[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, 40(9): 175-183.
- [15] DONG J, WANG S, LIN H, et al. Dynamic modeling of double-helical gear with Timoshenko beam theory and experiment verification[J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2016, 8(5): 1-14.



第一作者简介:董皓,男,1985年2月生,博士、教授。主要研究方向为齿轮传动与齿轮系统动力学。曾发表《Establishment of a multi-clearance coupled 3D floating nonlinear model and vibration analysis for a coaxial reverse closed differential herringbone gear transmission system》(《Nonlinear Dynamics》2024, Vol.113)等论文。
E-mail: donghao@xatu.edu.cn