

求解时变线性方程的噪声抑制零化神经网络^{*}

李春泉¹, 严达萱¹, 李定钰¹, 单思淇¹, 汪芊芊¹, 赖青梧¹, 李志农²

(1. 南昌大学信息工程学院 南昌, 330031)

(2. 南昌航空大学无损检测技术教育部重点实验室 南昌, 330063)

摘要 时变线性方程的快速求解在工程计算和机器人控制中具有重要意义,但现有零化神经网络通常面临收敛速度慢和对噪声敏感的问题。对此,提出了一种具有噪声抑制能力的预定义时间收敛的零化神经网络(predefined-time convergent noise-suppressing zeroing neural network,简称PTC-NS-ZNN)模型。首先,设计了一种基于模糊逻辑的参数调节机制,使激活函数可随误差变化自适应调整非线性增益,从而增强系统的瞬态性能并提高稳态精度;其次,从理论上分析了所提模型的稳定性、预定义时间收敛性及抗噪性能,证明了其在给定时间上界内可实现全局收敛,并具备有界噪声抑制能力;然后,在无噪声及多种经典噪声干扰环境下进行了数值仿真对比实验,发现相较于现有模型,PTC-NS-ZNN模型具有更快的收敛速度和更强的抗干扰能力;最后,将所提出模型应用于双机械臂轨迹规划,实验结果验证了其在不同环境下的高精度与实用性。研究表明,PTC-NS-ZNN模型在数值仿真和物理实验中均展现出显著优势,具有良好的工程应用潜力。

关键词 零化神经网络;时变线性方程;预定义时间收敛;鲁棒性

中图分类号 TH69;TP241

1 问题的引出

时变线性方程在工程领域被广泛应用,例如混沌动力学^[1]、机器人控制^[2]及电路^[3]等。传统方法通常采用数值迭代进行计算,例如牛顿迭代法^[4]。然而,面对复杂的时变问题时,这些方法的计算效率存在局限性。

近年来,递归神经网络(recurrent neural network,简称RNN)因其优秀的并行计算能力而受到广泛关注^[5-6]。Leung等^[7]提出了梯度神经网络(gradient neural network,简称GNN),可沿着负梯度方向不断逼近理论值,但由于滞后误差,GNN在动态环境下的收敛速度和精度仍存在不足。Zhang等^[8]提出了零化神经网络(zeroing neural network,简称ZNN),该网络有效结合了时间导数信息,被广泛应用于各类时变问题的求解,例如时变二次规划^[9]、时变矩阵方程^[10]等。鉴于此优点,学者们对ZNN进行了广泛研究^[11]。Deng等^[12]提出了时变参数变激活函数ZNN,使模型可以实现有限时间收敛,无需依赖特殊的激活函数。然而,时变参数随着时间越来越大,这不符合实际需求且占用资源。为此,Fu

等^[13]提出了计划变增益ZNN,提高了模型的性能。Xiao等^[14]提出了模糊自适应ZNN,获得了更快的收敛速度并节省了硬件资源。Zheng等^[15]提出了一种灵活的预定义时间收敛ZNN,其收敛速度更快,鲁棒性也有所提高。Tang等^[2]开发了具有独立可调收敛时间参数的非线性激活函数,使传统的ZNN实现了预定义时间的收敛。Zheng等^[16]提出了一种非线性分段激活函数来增强传统的ZNN,以较低的计算成本保证了良好的预定义时间收敛性能。尽管上述改进提升了ZNN模型的收敛速度与时间性能,但在实际工程环境中普遍存在各种噪声干扰^[17],这对ZNN的稳定性与精度提出了更高要求。

为了增强ZNN在噪声环境下的鲁棒性,学者们提出了很多ZNN的变体^[18]。Hu等^[19]提出一种预定义时间收敛且抗噪的ZNN用于求解含不等式约束及无约束的二次规划问题。李建锋等^[20]提出一种双重积分构型ZNN,专门用于处理线性噪声。Xiao等^[21]提出一种新型的激活函数,改善了积分型ZNN的稳定性。

目前,对于ZNN在收敛性能与抗噪能力方面的研究取得了诸多成果,但仍有以下问题亟待解决。

^{*} 国家自然科学基金项目资助(62173176, 62573220);江西省智能系统与人机交互重点实验室资助项目(2024SSY03121);江西省科学技术厅资助项目(20244BDF60011, 20252BCE310031)

收稿日期:2025-06-18;修回日期:2025-09-22

1) 现有的多数 ZNN 模型为了加快收敛速度,通常采用非线性激活函数以实现有限时间、固定时间或预定义时间收敛。然而,这类激活函数的参数很少有根据误差的大小进行自适应调节,容易引起振荡。

2) 现有的多数 ZNN 模型为提升抗噪性能而引入积分项,在提升鲁棒性的同时也增加了系统结构的复杂性与计算量,不利于在资源受限的实时系统中部署。

3) 少量针对特定噪声设计的 ZNN 模型虽在该类干扰下取得良好效果,但仍缺乏与预定义时间收敛机制的深度融合,从而无法兼顾求解精度与收敛时限。

笔者提出了一种具有噪声抑制的预定义时间收敛的零化神经网络模型,其主要技术路线如图 1 所示。

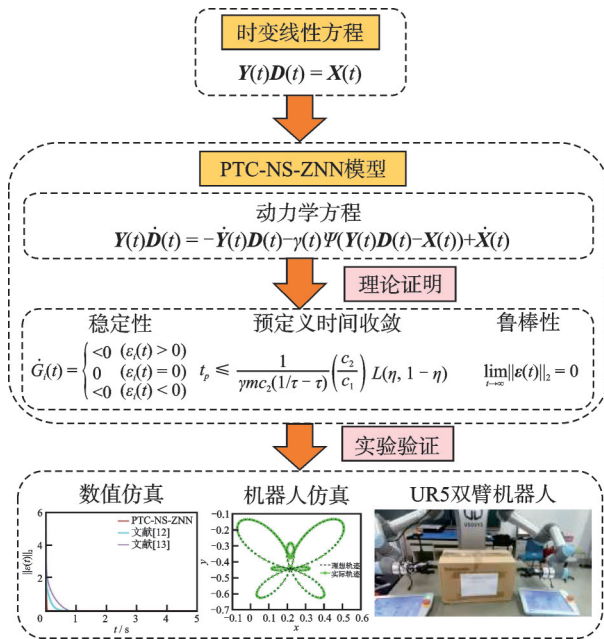


图 1 PTC-NS-ZNN 模型主要技术路线图

Fig.1 The main technical roadmap of PTC-NS-ZNN

2 面向时变线性方程的 PTC-NS-ZNN 模型设计

PTC-NS-ZNN 模型的设计思路如下:首先,在传统 ZNN 框架下,设计了一种模糊自适应激活函数,使系统具备预定义时间收敛特性,并能够根据误差大小动态改变非线性映射特性,从而提升抗噪性能并减少人工调参工作量;其次,设计了时变收敛系数以平衡初期快速收敛与后期稳态精度。

不失一般性,时变线性方程的表现形式^[22]为

$$Y(t)D(t)=X(t) \quad (1)$$

其中: $Y(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 为一个已知的时变矩阵; $X(t) \in \mathbb{R}^n$, 为一个已知的时变向量; $D(t) \in \mathbb{R}^n$, 为待

求解的未知向量;在本研究中,假设这些矩阵和向量是连续可微的。

根据 ZNN 的设计过程,构建一个误差函数

$$\epsilon(t)=Y(t)D(t)-X(t) \quad (2)$$

为了使误差函数 $\epsilon(t)$ 收敛到 0, 对式(2)求负的时间导数,得到

$$\dot{\epsilon}(t)=-\gamma(t)\Psi(\epsilon(t)) \quad (3)$$

其中: $\gamma(t)$ 为时变收敛系数; $\Psi(\cdot)$ 为激活函数,是一个单调递增的奇函数。

为了灵活控制收敛速度并抑制噪声,笔者提出了一种新的基于模糊控制的预定义时间收敛的激活函数,表达式为

$$\Psi(x)=\left(c_1\Psi^{v_1 \rightarrow m}(x)+c_2\Psi^{\frac{1}{v_1} \rightarrow m}(x)\right)\text{sign}(x)+c_2x \quad (4)$$

$\Psi^{v_1 \rightarrow m}(x)$ 和 $\Psi^{1/v_1 \rightarrow m}(x)$ 分别定义为

$$\Psi^{v_1 \rightarrow m}(x)=\sum_{n=1}^m|x|^{v_n}=|x|^{v_1}+|x|^{v_2}+\dots+|x|^{v_m}$$

$$\Psi^{1/v_1 \rightarrow m}(x)=\sum_{n=1}^m|x|^{1/v_n}=|x|^{1/v_1}+|x|^{1/v_2}+\dots+|x|^{1/v_m}$$

参数的设置规则为

$$[v_1, v_2, \dots, v_m]=$$

$$[1/m, 2/m, \dots, (m-2)/m, (m-1)/m]$$

其中: c_1 和 c_2 均为正实数; m 由模糊逻辑系统产生。

1) 模糊化。为模糊逻辑控制系统的输入 $\|\epsilon(t)\|_2$ 和输出 m 定义相应的模糊输入子集 E 和模糊输出子集 M , 以及隶属函数 $\Omega_{\|\epsilon(t)\|_2}$ 和 Ω_m 。2 种常见的隶属函数分别为三角函数和高斯函数, 其表达式分别为

$$\Omega_{\text{tri}}(\delta)=\begin{cases} 0 & (\delta \leq x) \\ \frac{\delta-x}{y-z} & (x < \delta \leq y) \\ \frac{z-\delta}{z-y} & (y < \delta \leq z) \\ 0 & (\delta \geq z) \end{cases}$$

$$\Omega_{\text{Gauss}}(\delta)=e^{-\frac{(\delta-z)^2}{2a^2}}$$

其中: x, y, z 和 a 均为常数。

2) 模糊推理引擎。选择“IF-THEN”规则作为模糊输入子集 E 和模糊输出子集 M 之间的模糊规则, 具体为: ① $R^{(1)}$: if $E=ZO$, then $M=ZO$; ② $R^{(2)}$: if $E=PS$, then $M=PS$; ③ $R^{(3)}$: if $E=PM$, then $M=PM$; ④ $R^{(4)}$: if $E=PB$, then $M=PB$ 。其中: ZO 表示 0 或接近 0 的值; PS 表示较小的正值; PM 表示中等的正值; PB 表示较大的正值。

根据模糊规则 $R^{(1)}$ 、 $R^{(2)}$ 、 $R^{(3)}$ 、 $R^{(4)}$,得到

$$M = E \circ R$$

其中: $\circ$ 为模糊变换符号; $R = R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup R^{(3)} \cup R^{(4)}$ 。

$$\Omega_{E \circ R}(m) = \Omega_{E \circ R^{(1)}} \vee \Omega_{E \circ R^{(2)}} \vee \Omega_{E \circ R^{(3)}} \vee \Omega_{E \circ R^{(4)}}$$

其中: $\Omega_{E \circ R^{(i)}} = \sup(\Omega_{E^{(i)}} \wedge \Omega_{M^{(i)}})$, $i = 1, 2, 3, 4$; $\sup$ 表示上界; $\vee$ 和 $\wedge$ 分别表示极大运算和极小运算。

3) 去模糊化。进行去模糊化操作,获得最终输出值 m ,本研究采用最大隶属度法,即

$$m = \arg \max(\Omega_{E \circ R}(m))$$

在提出的PTC-NS-ZNN模型中,时变收敛系数 $\gamma(t)$ 设计为

$$\gamma(t) = (\gamma_1 \operatorname{arccot}(t) + \gamma_2 t)^\gamma + \gamma$$

其中: γ_1, γ_2 和 γ 均为正实数。

当 t 趋于0时, $\operatorname{arccot}(t)$ 取较大值,能够在收敛初期提供强收敛驱动力,加速大误差的衰减;当 t 趋于 ∞ 时, $\operatorname{arccot}(t)$ 趋于0,收敛系数主要由线性项 $\gamma_2 t$ 及常数项 γ 决定,其变化趋于平缓,有助于降低系统在稳态阶段的振荡与数值抖动。该设计在收敛过程中实现了初期快速收敛与后期稳态精度的平衡,兼顾了动态性能与稳定性。

将式(3)代入式(2),得到PTC-NS-ZNN模型的动力学方程为

$$Y(t) \dot{D}(t) = -\dot{Y}(t) D(t) - \gamma(t) \Psi(Y(t) D(t) - X(t)) + \dot{X}(t) \quad (5)$$

图2为求解时变线性方程的PTC-NS-ZNN神经拓扑图。

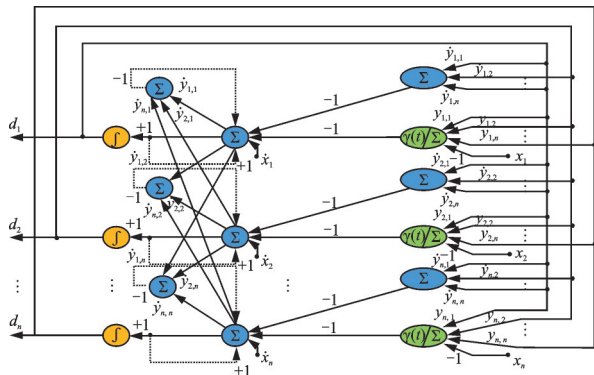


图2 求解时变线性方程的PTC-NS-ZNN神经拓扑图

Fig.2 The neural topology diagram of PTC-NS-ZNN for solving time-varying linear equation

考虑到实际环境中存在噪声干扰,PTC-NS-ZNN模型在该条件下的动力学方程为

$$Y(t) \dot{D}(t) = -\dot{Y}(t) D(t) - \gamma(t) \Psi(Y(t) D(t) - X(t)) + \dot{X}(t) + \Delta N(t) \quad (6)$$

其中: $\Delta N(t)$ 为外部噪声干扰。

3 理论分析

3.1 稳定性分析

定理 1 求解时变线性方程时,已知时变矩阵 $Y(t)$ 和时变向量 $X(t)$,PTC-NS-ZNN模型在李雅普诺夫意义下是全局稳定的。

证明:式(3)的第 i 个子系统为

$$\dot{\epsilon}_i(t) = -\gamma(t) \psi(\epsilon_i(t)) \quad (7)$$

其中: $i \in [1, 2, \dots, n]$; $\psi(\cdot)$ 为 $\Psi(\cdot)$ 的分量。

对式(7)构造李雅普诺夫函数,即

$$G_i(t) = \epsilon_i^2(t)/2 \quad (8)$$

对式(8)两边同时求时间导数,得到

$$\dot{G}_i(t) = \dot{\epsilon}_i(t) \epsilon_i(t) = -\gamma(t) \psi(\epsilon_i(t)) \epsilon_i(t) \quad (9)$$

由于 $\psi(\cdot)$ 为单调递增的奇激活函数,所以得到

$$\dot{G}_i(t) = \begin{cases} < 0 & (\epsilon_i(t) > 0) \\ 0 & (\epsilon_i(t) = 0) \\ < 0 & (\epsilon_i(t) < 0) \end{cases} \quad (10)$$

根据式(10)得到 $\dot{G}_i(t) \leq 0$ 恒成立。根据李雅普诺夫稳定性定理可知,由于PTC-NS-ZNN模型的任意子系统误差函数全局收敛到0,故该模型在李雅普诺夫意义下是全局稳定的。

3.2 预定义时间收敛性分析

定义随机实数 φ_1 和 φ_2 均大于0,则有

$$L(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 x^{\varphi_1-1} (1-x)^{(\varphi_2-1)} dx$$

上述方程称为完全Beta函数^[15],当 $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ 时,可以得到

$$L(\varphi_1, \varphi_2) = \pi \csc(\pi \varphi_1)$$

定理 2 求解时变线性方程时,已知时变矩阵 $Y(t)$ 和时变向量 $X(t)$,PTC-NS-ZNN模型的误差 $\|\epsilon(t)\|_2$ 将在预设的时间 t_p 下收敛到0。

t_p 的上界为

$$t_p \leq \frac{1}{\gamma m c_2 (1/\tau - \tau)} \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^\eta L(\eta, 1 - \eta)$$

其中: $\eta = (c_2 [c_1 G_i^{2\tau-1}(t) + c_2])$ 。

τ 定义为

$$\tau = \begin{cases} \nu_1 & (\epsilon_i(t) > 1) \\ \nu_m & (\epsilon_i(t) \leq 1) \end{cases}$$

证明:为了证明PTC-NS-ZNN模型的预定义时间收敛能力,设计李雅普诺夫函数为

$$G_i(t) = |\epsilon_i(t)| \quad (11)$$

对式(11)两端同时求取时间导数,得到

$$\dot{G}_i(t) = \dot{\epsilon}_i(t) \text{sign}(\epsilon_i(t)) \quad (12)$$

根据式(4),式(12)可以进一步变换为

$$\dot{G}_i(t) \leq -\gamma(t) \left(c_1 \sum_{n=1}^m |\epsilon_i(t)|^{v_n} + c_2 \sum_{n=1}^m |\epsilon_i(t)|^{1/v_n} \right) \quad (13)$$

为了求得参数 $|\epsilon_i(t)|^r = \min\{|\epsilon_i(t)|^{p_n}, n=1, 2, \dots, m\}$, 对 $|\epsilon_i(t)|$ 进行分析。当 $|\epsilon_i(t)| > 1$ 时, 可以得到 $|\epsilon_i(t)|^{p_1} \leq |\epsilon_i(t)|^{p_2} \leq \dots \leq |\epsilon_i(t)|^{p_m}$, 因此参数 $\tau = v_1$ 。当 $|\epsilon_i(t)| \leq 1$ 时, 可以得到 $|\epsilon_i(t)|^{p_1} \geq |\epsilon_i(t)|^{p_2} \geq \dots \geq |\epsilon_i(t)|^{p_m}$, 因此参数 $\tau = v_m$ 。

根据上述分析得到

$$m|\epsilon_i(t)|^r \leq \sum_{n=1}^m |\epsilon_i(t)|^{v_n} \quad (14)$$

其中: $|\epsilon_i(t)|^r \leq |\epsilon_i(t)|^{p_n}, n=1, 2, \dots, m$ 。

将式(14)代入(13),得到

$$\dot{G}_i(t) \leq -\gamma(t) (c_1 m |\epsilon_i(t)|^r + c_2 m |\epsilon_i(t)|^{1/r}) = -\gamma(t) (c_1 m G_i^r(t) + c_2 m G_i^{1/r}(t)) \quad (15)$$

对式(15)两边进行积分,得到

$$\int_0^{t_p} \gamma(t) dt \leq \int_{G_i(0)}^{G_i(t_p)} \frac{1}{m(c_1 G_i^r(t) + c_2 G_i^{1/r}(t))} dG_i(t) = \frac{1}{mc_2(1/\tau - \tau)} \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^\eta L(\eta, 1 - \eta) \quad (16)$$

由于 $\int_0^{t_p} (\gamma_1 \text{arccot}(t) + \gamma_2 t)^\gamma + \gamma dt > \int_0^{t_p} (\gamma_2 t)^\gamma + \gamma dt > \int_0^{t_p} \gamma dt$, 因此得到 $t_p \leq \frac{1}{\gamma mc_2(1/\tau - \tau)} \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^\eta \times L(\eta, 1 - \eta)$ 。

因此, PTC-NS-ZNN 模型的误差函数 $\|\epsilon(t)\|_2$ 将在预设的时间 t_p 下收敛到 0。

3.3 鲁棒性分析

定理 3 求解时变线性方程时, 已知时变矩阵 $Y(t)$ 和时变向量 $X(t)$, 在不确定有界噪声 $\Delta N(t)$ 环境下, 当时间趋于无穷时, 误差 $\|\epsilon(t)\|_2$ 将收敛到 0。

证明: 首先, 当有噪声时, 式(3)中第 i 个子系统可以表示为

$$\dot{\epsilon}_i(t) = -\gamma(t) \phi(\epsilon_i(t)) + \Delta n_i(t) \quad (17)$$

由于噪声项是有界的, 因此存在常数 $s > 0$, 使得 $|\Delta n_i(t)| \leq s, \forall t \geq 0$ 。

其次, 构建李雅普诺夫函数为

$$G_i(t) = \epsilon_i^2(t)/2 \quad (18)$$

对式(18)求时间导数, 并代入式(17), 得到

$$\dot{G}_i(t) = \dot{\epsilon}_i(t) \epsilon_i(t) = -\gamma(t) \phi(\epsilon_i(t)) + \Delta n_i(t) \epsilon_i(t)$$

当 $\dot{G}_i(t) < 0$ 时, $\dot{G}_i(t)$ 是稳定的, 得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\epsilon(t)\|_2 = 0$; 当 $\dot{G}_i(t) > 0$ 时, $|\epsilon_i(t)|$ 将持续增长, 直到 $-\gamma(t) \phi(\epsilon_i(t)) + \Delta n_i(t) = 0$ 。

当时间 t 趋于无穷时, $0 \leq |\epsilon_i(t)| \leq$

$$\left| \phi^{-1} \left(\frac{\Delta n_i(t)}{\gamma(t)} \right) \right|, \text{根据激活函数的定义, 得到}$$

$$0 \leq |\epsilon_i(t)| \leq \left| \frac{\Delta n_i(t)}{c_2 \gamma(t)} \right|$$

最后, 将误差 $\|\epsilon(t)\|_2$ 写为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\epsilon(t)\|_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s \sqrt{mn}}{c_2 ((\gamma_1 \text{arccot}(t) + \gamma_2 t)^\gamma + \gamma)} = 0$$

因此, 当时间 t 趋于无穷时, 误差函数 $\|\epsilon(t)\|_2$ 将收敛到 0。

4 数值仿真

笔者通过一个数值算例来验证所提出的 PTC-NS-ZNN 模型的性能。所有仿真实验均在同一主机上完成, 其硬件配置为: Intel i5-14600KF CPU (主频为 5.3 GHz)、NVIDIA GeForce RTX 4060 Ti GPU 和 32 GB 内存。软件环境为 MATLAB 2024a, 并采用 ODE45 求解器进行数值积分。

该数值算例为时变线性方程, 即

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \sin t + 2 & \sin t & \sin(3t) \\ \cos t & \sin t + 2 & \cos(3t) \\ \sin(3t) & \cos(3t) & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$X(t) = [\sin(2t), \cos(2t), -\cos(2t)]^T \in \mathbb{R}^3$$

由此得出时变线性方程的完整表达式为

$$\begin{bmatrix} \sin t + 2 & \sin t & \sin(3t) \\ \cos t & \sin t + 2 & \cos(3t) \\ \sin(3t) & \cos(3t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \\ -\cos(2t) \end{bmatrix}$$

PTC-NS-ZNN 模型的参数设置如下: $c_1=1$, $c_2=1$ 和 $\gamma_1=1, \gamma_2=1, \gamma=1$ 。PTC-NS-ZNN 模型

的隶属函数如图 3 所示,显示了输入(即 $\|\epsilon(t)\|_2$)的高斯隶属度函数和输出(即 m)的三角隶属度函数。

为了验证笔者所提出的 PTC-NS-ZNN 模型的先进性,与文献[12]、[13]提出的模型进行对比。

文献[12]提出的模型为

$$\dot{\epsilon}(t) = -\eta e^t \mathcal{F}_1(\epsilon(t)) - \zeta e^t \mathcal{F}_2(\epsilon^r(t))$$

文献[13]提出的模型为

$$\dot{\epsilon}(t) = -(\alpha + \eta e^{-\beta t} \mathcal{F}_1(\epsilon(t)))$$

其中: $\eta, \zeta, \gamma, \alpha, \beta$ 均为可设置的参数; $\mathcal{F}_1(\cdot)$ 和 $\mathcal{F}_2(\cdot)$ 为可设置的激活函数。

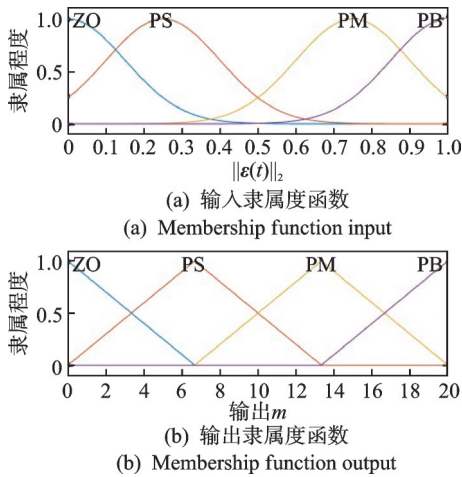


图 3 PTC-NS-ZNN 模型的隶属函数

Fig.3 The membership function of the proposed PTC-NS-ZNN model

4.1 无噪声环境下收敛性能比较

在无噪声环境下,将提出的 PTC-NS-ZNN 模型与文献[12]、[13]中的模型进行对比。通过比较收敛残差 $\|\epsilon(t)\|_2$ 和理论解 $D(t)=[d_1(t), d_2(t), d_3(t)]^T$ 的收敛速度来验证 PTC-NS-ZNN 模型的收敛性能。无噪声环境下 PTC-NS-ZNN 模型与文献[12]、[13]模型的实验结果对比如图 4 所示。可见,PTC-NS-ZNN 模型的收敛速度快于文献[12]、[13]中的 2 种方法,这表明所提出的模型具有更优的收敛性能。

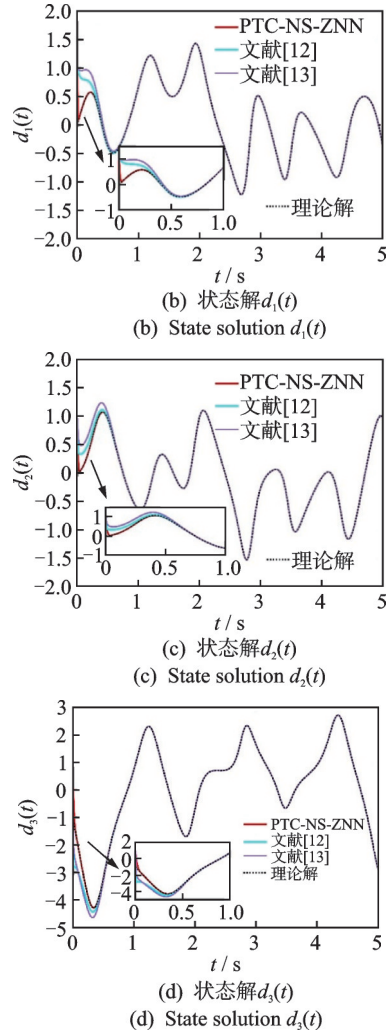
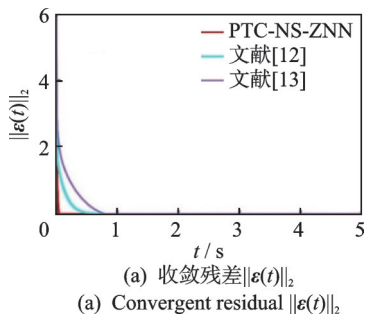


图 4 无噪声环境下 PTC-NS-ZNN 模型与文献[12]、[13]模型的实验结果对比

Fig.4 The experimental results of the PTC-NS-ZNN model in a noise-free environment were compared with the models of references [12] and [13]

4.2 有界噪声干扰收敛性能比较

为了验证所提出模型的鲁棒性,在 4 种不同噪声环境下 PTC-NS-ZNN 模型与文献[12]、[13]模型的收敛残差对比如图 5 所示。当噪声信号分别为正余弦波噪声 $\Delta N(t)=5[\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \sin(2\pi t)]^T$ 、三角波噪声 $\Delta N(t)=5\text{sawtooth}(2\pi t)$ 、方波噪声 $\Delta N(t)=5\text{square}(2\pi t)$ 和正弦高斯白噪声时,PTC-NS-ZNN 模型均能够有效抑制噪声干扰且完成快速收敛;相比之下,文献[12]、[13]中的模型在上述噪声条件下无法保证有效收敛。可见,此实验结果验证了定理 3 的正确性,并充分表明所提出的 PTC-NS-ZNN 模型具有较强的鲁棒性。

在无噪声和 4 种不同噪声环境下的实验结果表

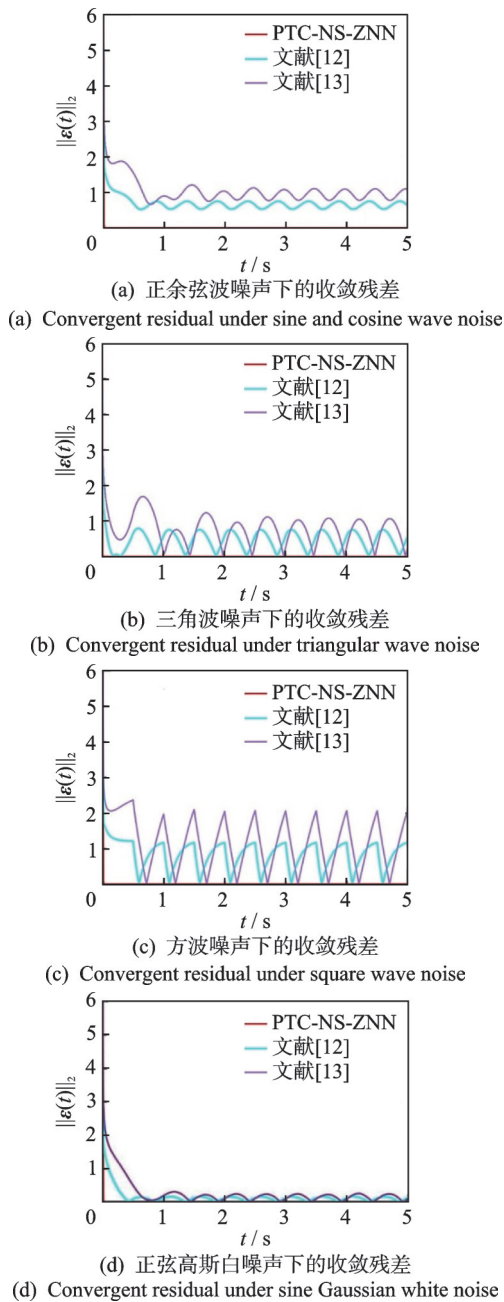


图5 4种不同噪声环境下PTC-NS-ZNN模型与文献[12]、[13]模型的收敛残差对比

Fig.5 Comparison of the convergence residuals of the PTC-NS-ZNN model and the models in references [12] and [13] under 4 different noise environments

明,PTC-NS-ZNN模型具备优异的收敛性和鲁棒性,这也验证了定理1~3的正确性。

所提出的PTC-NS-ZNN模型快速收敛的主要原因在于:①预定义时间收敛律的设计保证误差在设计参数可控的有限上界时间内达到0;②采用的模糊自适应激活函数会在误差较大时自动放大非线性增益,使误差项在瞬态期受到强烈抑制;③时变收敛系数 $\gamma(t)$ 在初期取较大有效值,显著增强了误差动力学中的负反馈项,使系统具有更大的初始收敛

驱动力,进而加快瞬态响应并缩短整体收敛时间。

5 双机械臂的应用

为了进一步验证所提出PTC-NS-ZNN模型的有效性,将其应用于双机械臂中。双机械臂因在协作搬运、装配、双面加工及精密医疗等任务中的优势,已成为智能制造与服务机器人研究热点^[23-25]。笔者在同一任务框架下独立规划双机械臂的各自轨迹,同时通过协调机制避免相互干涉与冲突。由于初始姿态和目标差异,两臂轨迹不同,更贴近实际场景,也为验证PTC-NS-ZNN模型在异构轨迹规划中的有效性提供了依据。

在双臂协作任务中,轨迹跟踪需兼顾快速收敛和高精度,并在噪声、通信延迟等干扰下保持稳定。传统方法常在收敛速度与鲁棒性间折衷。笔者提出的PTC-NS-ZNN模型结合预定义时间收敛律、模糊自适应激活函数与时变收敛系数,可在设定时间内精确消除误差,并有效抑制稳态振荡与外界干扰。

一般来说,机械臂末端执行器的位置 $\boldsymbol{v}(t)$ 和速度的运动学方程^[16]分别为

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}(t)) \quad (19)$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}(t))\dot{\boldsymbol{q}}(t) \quad (20)$$

其中: $\boldsymbol{q}(t)$ 为机械臂关节空间的向量; $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 为机械臂的正运动学映射函数; $\boldsymbol{J}(\cdot)$ 为机械臂的雅克比矩阵。

双臂机器人系统的2个机械臂能够同时执行给定的任务,针对左机械臂和右机械臂的轨迹优化问题,可以将2种独立的方案统一为1种综合性的方案,得到二次规划机械臂轨迹运动方程为

$$\min \frac{\boldsymbol{x}^T(t) \boldsymbol{H} \boldsymbol{x}(t)}{2} + \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{x}(t) \quad (21)$$

$$\text{s.t. } \boldsymbol{W} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{\delta}(t)$$

$$\text{其中: } \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_l(t) \\ \boldsymbol{q}_r(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^{2m}; \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_l & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K}_r \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}; \quad \boldsymbol{K}_{l,r} = (\boldsymbol{q}_{l,r}(t) - \boldsymbol{q}_{l,r}(0))^2 \boldsymbol{I}; \quad \boldsymbol{\delta}(t) =$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_l(t) \\ \boldsymbol{\omega}_r(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta}(t) \in \mathbb{R}^{2n}; \quad \boldsymbol{\omega}_{l,r}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}_{l,r}(t) + \rho(\boldsymbol{v}_{l,r}(t) -$$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}_{l,r}(t)))$; $\boldsymbol{v}_l(t)$ 和 $\boldsymbol{v}_r(t)$ 分别为左右机械臂的末端执行器位置; ρ 为反馈系数,用来抑制关节角漂移;

$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_l & 0 \\ 0 & \boldsymbol{J}_r \end{bmatrix}, \boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{2n \times 2m}$; $\boldsymbol{q}_l(t)$ 和 $\boldsymbol{q}_r(t)$ 分别为左右机械臂的关节角向量。

为求解式(21),可以将其转换为拉格朗日形式,具体为

$$L(x(t), \lambda(t), t) = x^T(t)Hx(t)/2 + \tau^T(t)x(t) + \lambda^T(t)(Wx(t) - \delta(t)) \quad (t \in [0, +\infty)) \quad (22)$$

其中: $\lambda(t) \in \mathbb{R}^{2m}$, 为拉格朗日乘子向量。

对式(22)的 $x(t)$ 和 $\lambda(t)$ 求偏导,并使2个方程均为0,则可以得到最优解 $x^*(t)$ 和最优拉格朗日乘子 $\lambda^*(t)$,即

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x^*(t), \lambda^*(t), t)}{\partial x^*(t)} = Hx^*(t) + \tau + W^T(t)\lambda^*(t) = 0 \\ \frac{\partial L(x^*(t), \lambda^*(t), t)}{\partial \lambda^*(t)} = W(t)x^*(t) - \delta(t) = 0 \end{cases}$$

为便于求解式(22),将其转化为矩阵方程

$$Y(t)D^*(t) = X(t) \quad (23)$$

其中: $Y(t) = \begin{bmatrix} H & W^T(t) \\ W(t) & 0_{2m \times 2m} \end{bmatrix}$, $Y(t) \in \mathbb{R}^{(2n+2m) \times (2n+2m)}$;

$$D^*(t) = \begin{bmatrix} x^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{bmatrix}, D^*(t) \in \mathbb{R}^{2n+2m}; \quad X(t) = \begin{bmatrix} -\tau(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix},$$

$X(t) \in \mathbb{R}^{2n+2m}$ 。

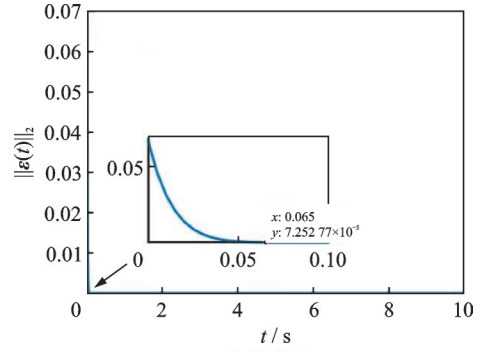
因此,定义误差函数 $\epsilon(t)$ 为

$$\epsilon(t) = Y(t)D(t) - X(t) \quad (24)$$

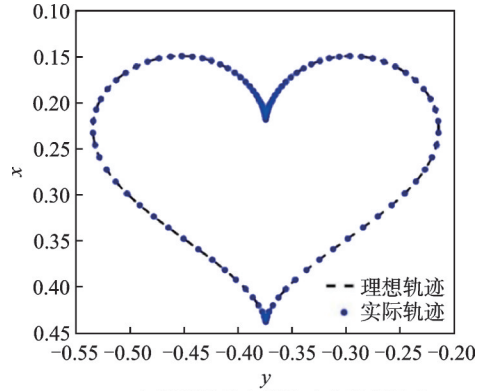
在无噪声、无外部扰动的理想环境中开展仿真实验。图6为PTC-NS-ZNN模型在Matlab中机械臂仿真实验结果。如图6(a)所示,PTC-NS-ZNN模型能够在0.1s内快速且精确地收敛到预定轨迹,体现出该模型的快速收敛能力。同时,如图6(b)~(c)所示,该方法下双机械臂的实际运动轨迹与期望轨迹高度重合,进一步验证了所提模型在双机械臂轨迹跟踪任务中的有效性与可行性。

在此基础上,为评估所提出方法在实际机器人系统中的工程适用性,开展了UR5双机械臂实物实验。图7为UR5双臂机器人按照预定轨迹协同运动并完成箱体搬运任务的实验过程快照。实验结果表明,在真实硬件平台上,所提出的PTC-NS-ZNN模型同样能够实现稳定、平滑且精确的轨迹跟踪控制,验证了该方法在实际双机械臂协作任务中的可实施性与可靠性。

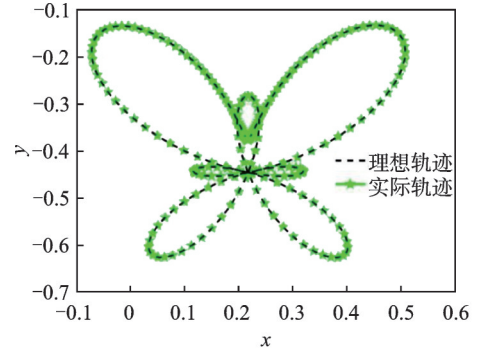
综上所述,PTC-NS-ZNN模型在仿真与实物实验中均表现出优异的快速收敛性能和轨迹跟踪精度,其结构简洁、计算效率高,易于部署在嵌入式或资源受限的机器人控制平台,具有良好的工程推广价值,可广泛应用于工业装配、协作搬运、精密焊接及医疗手术等对响应速度和鲁棒性要求较高的双机械臂应用场景。



(a) 收敛残差 $\|\epsilon(t)\|_2$
(a) Convergent residual $\|\epsilon(t)\|_2$



(b) 左机械臂的实际轨迹和期望轨迹
(b) The actual trajectory and expected trajectory of the left robotic arm



(c) 右机械臂的实际轨迹和期望轨迹
(c) The actual trajectory and expected trajectory of the right robotic arm

图6 PTC-NS-ZNN模型在Matlab中机械臂仿真实验结果
Fig.6 The simulation experiment results of the PTC-NS-ZNN model for the robotic arm in Matlab

6 结 论

1) 提出了一种新颖的具有噪声抑制能力的预定义时间收敛零化神经网络模型。该模型通过引入基于模糊控制的自适应激活函数,兼顾了系统的收敛速度与对噪声的鲁棒性。通过数学推导与稳定性分析,理论上证明了该模型在预设时间内实现全局收敛的能力,同时具备较强的抗噪性能。

2) 为了进一步验证所提出模型的有效性与实用性,在无噪声与有噪声的环境下分别设计并开展

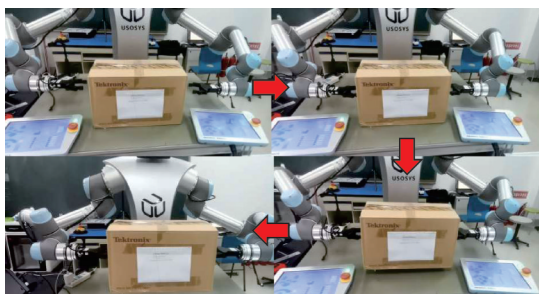


图7 UR5 双臂机器人按照预定轨迹协同运动并完成箱体搬运任务的实验过程快照

Fig.7 Snapshot of the experimental result of the UR5 dual-arm robot moving and transporting box along the pre-defined trajectory

了数值仿真实验。实验结果显示,该模型在2种情况下均展现出良好的动态性能,不仅收敛速度明显快于文献中的模型,而且在存在扰动和噪声的条件下仍保持较高的解精度,表现出强大的鲁棒性和稳定性,且实验结果与理论分析高度吻合。

3) 将该模型应用于双机械臂系统的运动轨迹规划任务中,进一步验证了其在实际复杂控制系统中的可行性与工程价值。实验表明,PTC-NS-ZNN模型能够实现精确、高效的路径跟踪控制。在未来工作中,致力于将该模型推广到更多的实际物理平台的双臂机器人控制中,探索其在更多实际智能控制场景中的应用潜力。

参 考 文 献

- [1] BRUNTON S L, BRUNTON B W, PROCTOR J L, et al. Chaos as an intermittently forced linear system[J]. Nature Communications, 2017, 8(1): 19.
- [2] TANG W S, CAI H, XIAO L, et al. A predefined-time adaptive zeroing neural network for solving time-varying linear equations and its application to Ur5 robot [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2025, 36(3): 4703-4712.
- [3] SUN Z, PEDRETTI G, MANNOCCI P, et al. Time complexity of in-memory solution of linear systems[J]. IEEE Transactions on Electron Devices, 2020, 67(7): 2945-2951.
- [4] SHERMAN A H. On Newton-iterative methods for the solution of systems of nonlinear equations [J]. SI-AM Journal of Numerical Analysis, 1978, 15 (4) : 755-771.
- [5] ZHENG B Y, LI C Q, JIAO Y N, et al. A unified arbitrarily predefined-time convergent recurrent neural network for motion control of redundant robot manipulators: a unified paradigm[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Systems, 2025, 55(11): 8443-8454.
- [6] HE Y J, XIAO L, ZUO Q Y, et al. A predefined-time robust sliding mode control based on zeroing neural dynamics for position and attitude tracking of quadrotor [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Systems, 2025, 55(4): 2438-2450.
- [7] LEUNG Y, CHEN K Z, JIAO Y C, et al. A new gradient-based neural network for solving linear and quadratic programming problems [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2001, 12(5): 1074-1083.
- [8] ZHANG Y N, JIANG D C, WANG J. A recurrent neural network for solving sylvester equation with time-varying coefficients[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2002, 13(5): 1053-1063.
- [9] SONG Y T, REN X H, ZHENG L N, et al. Two types of anti-noise integral enhanced recurrent neural networks for solving time-varying complex quadratic programming[J]. Neurocomputing, 2024, 598: 128136.
- [10] ZHANG Y Y, LIAO B L, GENG G G. GNN model with robust finite-time convergence for time-varying systems of linear equations[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Systems, 2024, 54(8): 4786-4797.
- [11] CAO M R, XIAO L, ZUO Q Y, et al. Data-based model-free predictive control system under the design philosophy of MPC and zeroing neurodynamics for robotic arm pose tracking[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2025, 36 (9) : 17477-17490.
- [12] DENG J H, LI C Q, CHEN R L, et al. A novel variable-parameter variable-activation-function finite-time neural network for solving joint-angle drift issues of redundant-robot manipulators [J]. IEEE-ASME Transactions on Mechatronics, 2025, 30(2): 1578-1589.
- [13] FU J L, ZHANG Y Y, GENG G G, et al. Recurrent neural network with scheduled varying gain for solving time-varying QP [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems (II) Express Briefs, 2024, 71 (2) : 882-886.
- [14] XIAO L, WANG D, ZUO Q Y, et al. A ZNN-based solver with adaptive input range fuzzy logic system for time-varying algebraic riccati equation[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2025, 33(2): 757-766.
- [15] ZHENG B Y, HAN Z Y, LI C Q, et al. A flexible-predefined-time convergence and noise-suppression ZNN for solving time-variant sylvester equation and its application to robotic arm[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2024, 178: 114285.

- [16] ZHENG B Y, LI C Q, ZHANG Z J, et al. An arbitrarily predefined-time convergent RNN for dynamic LMVE with its applications in UR3 robotic arm control and multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2025, 55(4): 1789-1800.
- [17] 王钰涵, 郑旭, 周南, 等. 基于振动测试和机器学习的发动机噪声预测[J]. 振动、测试与诊断, 2025, 45(3): 506-512.
- WANG Yuhuan, ZHENG Xu, ZHOU Nan, et al. Engine noise prediction based on vibration testing and machine learning[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2025, 45(3): 506-512. (in Chinese)
- [18] JIN L, ZHANG Y N, LI S, et al. Modified ZNN for time-varying quadratic programming with inherent tolerance to noises and its application to kinematic redundancy resolution of robot manipulators[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63 (11) : 6978-6988.
- [19] HU Z S, XIAO L, DAI J H, et al. A unified predefined-time convergent and robust ZNN model for constrained quadratic programming[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2020, 17(3): 1998-2010.
- [20] 李建锋, 刘哲宇, 荣洋, 等. 用于线性噪声时变凸二次规划的归零神经网络[J]. 通信学报, 2023, 44(4): 226-233.
- LI Jianfeng, LIU Zheyu, RONG Yang, et al. Zeroing neural network for time-varying convex quadratic programming with linear noise[J]. Journal on Communications, 2023, 44(4): 226-233. (in Chinese)
- [21] XIAO L, CAO P L, SONG W T, et al. A fixed-time noise-tolerance ZNN model for time-variant inequality-constrained quaternion matrix least-squares problem[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2024, 35(8): 10503-10512.
- [22] WU W Q, ZHENG B. Two new Zhang neural networks for solving time-varying linear equations and inequalities systems[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2023, 34(8): 4957-4965.
- [23] 崔光裕, 李波, 乐毅, 等. 弱刚性构件双机器人协同加工振动抑制方法[J]. 振动、测试与诊断, 2024, 44(1): 147-152.
- CUI Guangyu, LI Bo, YUE Yi, et al. Method for suppressing vibration in coordinated processing of weakly rigid components by dual robots[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2024, 44(1): 147-152. (in Chinese)
- [24] 郑炬炬, 孙志峻, 闫鹤, 等. 运用中空超声电机的血管介入手术机器人系统[J]. 振动、测试与诊断, 2021, 41(5): 976-983.
- ZHENG Juju, SUN Zhijun, YAN He, et al. Vascular interventional surgical robot system utilizing hollow ultrasonic motor[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2021, 41(5): 976-983. (in Chinese)
- [25] DONG Y, YU Z G, CHEN X C, et al. Bimanual continuous steering wheel turning by a dual-arm robot[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2024, 29(3): 1773-1784.



第一作者简介:李春泉,男,1980年2月生,博士、教授、博士生导师。IEEE Senior Member,中国仪器仪表学会力触觉感知与交互专委会常务委员,CCF人机交互专委会执行委员,国家虚拟现实创新中心专家委员会委员。主要研究方向为智能机器人技术及其应用、神经动力学及优化。主持多项国家自然科学基金、省部级重点项目等。发表学术论文50余篇,授权发明专利20余项。荣获江西省科技进步一等奖和二等奖、中国国际高新技术成果交易会优秀产品奖等。

E-mail: lichunquan@ncu.edu.cn