

# 双重密度聚类的随机子空间法模态参数识别\*

马世纪, 乔兰, 李澳, 李庆文, 郑海琪, 罗安

(北京科技大学土木与资源工程学院 北京, 100083)

**摘要** 针对结构模态测试过程中,由于传感器个数或采集通道限制而需分组测试时,稳定模态信息的有效整合和虚假模态剔除的问题,提出了一种双重密度聚类算法(density-based spatial clustering of applications with noise, 简称 DBSCAN)的随机子空间模态参数识别方法。首先,获取并研究了简支梁桥、钢管混凝土、连续梁桥以及连续刚构桥的多组振动时程数据;其次,利用 DBSCAN 聚类算法的优势,通过一次和二次聚类,整合各组稳定图中的模态数据,剔除虚假模态;最后,确认了模态参数。结果表明,本研究方法在模态参数识别方面与结构理论值或试验模态分析结果高度一致,能够有效综合多测组稳定图信息,剔除虚假模态,获得准确的低阶自振频率和振型等模态参数。

**关键词** 结构健康监测;自主工作模态分析;稳定图;密度聚类;随机子空间  
**中图分类号** TU311;TH1131

## 引言

工作模态分析(operational modal analysis, 简称 OMA)是一种通过实测数据提取结构固有频率、阻尼比和振型等重要参数的技术,用于检测结构的健康状况和性能。在 OMA 领域,已经发展出多种模态参数识别算法,如特征系统实现算法、功率谱法和协方差驱动随机子空间法(covariance-driven stochastic subspace identification, 简称 SSI-cov)等<sup>[1-3]</sup>。其中,SSI-cov 作为一种常用的时域模态参数识别方法,广泛应用于结构动力学分析中,但在使用该方法时需要事先指定一些参数。文献[4]通过敏感性分析研究了 Toeplitz 矩阵行块数等对 SSI-cov 识别结果的影响,提出了满足精度要求并控制运行时间的参数设置范围,并在框架模型中验证了参数合理性。文献[5]探讨了模型系统阶数等对 SSI-cov 的影响,提出了优化参数选择的建议,改善了模态识别精度,在藏式古城墙应用中表现良好。

在实际的 OMA 应用中,受到噪声、计算舍入等方面的影响,确定状态空间模型系统阶数时常存在困难,同时也伴随着虚假模态出现,给模态识别带来挑战。为了有效提出真实模态,一种常用的方法是利用稳定图<sup>[6-8]</sup>,通过在不同系统阶数下使用模态识别技术来识别模态参数,将结果绘成图像,其横轴表

示频率,纵轴表示系统阶数。尽管稳定图在模态辨识中具有重要作用,但人工分析稳定图往往费时费力,尤其对于复杂结构,人工辨别的准确性和效率受到限制。

针对上述模态辨识问题,结构自主工作模态分析(autonomous OMA, 简称 AOMA)应运而生。AOMA 将智能算法引入到模态分析中,实现对结构模态参数的自主识别和分析,提高分析效率和准确性,实现对结构动态特性的自动化识别和监测<sup>[9]</sup>。目前,AOMA 的主要方式可分为聚类、峰值提取法和深度学习法 3 类<sup>[10-11]</sup>。基于聚类的算法,如模糊 C 均值、DBSCAN 等,在自动辨识模态参数方面展现出极大的潜力。将聚类算法与稳定图结合,可以在多阶数的模态识别中有效剔除虚假模态,实现更加精准的模态辨识<sup>[12-16]</sup>。单豪良等<sup>[17]</sup>提出了一种改进的确定-随机子空间模态参数识别算法,将 DBSCAN 嵌入随机子空间算法中,实现模态参数自动识别。

受传感器数量和采集通道的限制,结构模态测试通常需要采用分组测试的方法。传统的模态参数识别方法在处理多分组测试数据时存在很大的局限性,虽然这些方法能够对各个测组的数据进行单独分析,但往往难以有效整合各测组的结果,尤其是在识别和剔除虚假模态参数方面表现不佳。为了解决

\* 国家自然科学基金面上资助项目(52274107, 52204091, 52374113);北京市科技新星计划资助项目(20230484242);中央高校优秀青年团队培育资助项目(FRF-EYIT-23-01)

收稿日期:2024-07-07;修回日期:2024-08-28

这一问题,笔者构建了基于双重 DBSCAN 的 SSI-cov 方法,以便在多分组测试条件下实现对结构模态参数的准确识别。该方法在 SSI-cov 的基础上引入双重 DBSCAN 聚类,在处理多分组的测试数据时,能够更加有效地整合来自不同测组的信息,同时有效减少虚假模态的干扰,以得到准确的模态参数。

## 1 自主工作模态参数识别框架

### 1.1 结构振动理论

将多自由度结构系统中每个自由度列力平衡方程写成矩阵形式,得到结构的振动微分方程<sup>[18-19]</sup>,即

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) = B_2 u(t) \quad (1)$$

其中: $M, C, K \in R^{n \times n}$ ,分别为质量、阻尼、刚度矩阵; $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t) \in R^{n \times 1}$ 分别为  $t$ 时刻的位移、速度、加速度列向量; $f(t) \in R^{n \times 1}$ ,为外载荷向量,可以用输入位置矩阵  $B_2 \in R^{n \times m}$ 和输入向量  $u(t) \in R^{m \times 1}$ 的乘积表示, $m$ 为输入力的自由度个数, $n$ 为自由度数。

对于一般黏性阻尼结构,阻尼矩阵无法通过无阻尼系统振型来对角化,此时系统振型为复数,振动微分方程的向量形式为

$$\begin{cases} A\dot{z}(t) + Bz(t) = \begin{Bmatrix} B_2 \\ 0 \end{Bmatrix} u(t) \\ A = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \\ z(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (2)$$

按照一阶常微分方程求解思路对自由振动微分方程进行求解,得到  $n$ 对共轭复特征值和对应的复特征向量,即

$$\begin{cases} z(t) = \tilde{\psi} e^{\lambda t} = \begin{Bmatrix} \psi \\ \lambda \psi \end{Bmatrix} e^{\lambda t} \\ (\lambda A + B)\tilde{\psi} = 0 \\ \Lambda_c = \begin{bmatrix} \Lambda & \\ & \Lambda^* \end{bmatrix} \\ \Lambda = \text{diag}(\lambda_i) \\ \tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} \Psi & \Psi^* \\ \Psi\Lambda & \Psi^*\Lambda^* \end{bmatrix} \\ \Psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \cdots \ \psi_n] \\ A\tilde{\Psi}\Lambda_c + B\tilde{\Psi} = 0 \\ M\Psi\Lambda^2 + C\Psi\Lambda + K\Psi = 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\Lambda_c$ 为特征值对角矩阵; $\tilde{\Psi}$ 为复特征向量矩阵; $\Psi$ 为模态矢量; $(\cdot)^*$ 为共轭; $\lambda_r$ 为  $r$ 阶复特征值。

$\tilde{\Psi}$ 各列向量之间线性无关,是模态向量空间一组基,根据其正交性有

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}^T A \tilde{\Psi} = \text{diag}(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \ a_1^* \ a_2^* \ \cdots \ a_n^*) \\ \tilde{\Psi}^T B \tilde{\Psi} = \text{diag}(b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n \ b_1^* \ b_2^* \ \cdots \ b_n^*) \\ \lambda_i = -b_i/a_i \end{cases} \quad (4)$$

设  $\lambda_r, \lambda_r^* = -\alpha_r \pm \beta_r$ ,定义复模态广义质量、阻尼和刚度为  $\tilde{m}_r = \tilde{\psi}_r^T M \tilde{\psi}_r^*$ ,  $\tilde{c}_r = \tilde{\psi}_r^T C \tilde{\psi}_r^*$ ,  $\tilde{k}_r = \tilde{\psi}_r^T K \tilde{\psi}_r^*$ ,则可得

$$\begin{cases} \lambda_r, \lambda_r^* = -\tilde{\xi}_r \tilde{\omega}_r \pm i \tilde{\omega}_r \sqrt{1 - \tilde{\xi}_r^2} \\ \tilde{\omega}_r = \sqrt{\tilde{k}_r / \tilde{m}_r} \\ \tilde{\xi}_r = \tilde{c}_r / 2 \tilde{m}_r \tilde{\omega}_r \end{cases} \quad (5)$$

### 1.2 协方差驱动随机子空间法

利用结构的位移、速度或加速度响应序列  $y(k)$  构建 Hankel 矩阵

$$H = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{j-1} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{i-1} & y_i & \cdots & y_{i+j-2} \\ y_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+j-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_{i+j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & \cdots & y_{2i+j-2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{0|i-1} \\ Y_{i|2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_p \\ Y_f \end{pmatrix} \quad (6)$$

其中: $y_k = y(k) \in R^{l \times 1}$ ,为  $k$ 序号对应时刻的输出向量块; $H$ 由  $Y_p = Y_{0|i-1}$ 和  $Y_f = Y_{i|2i-1}$ 构成, $H$ 的列数为  $j$ ,其每列由  $2i$ 个  $y_k$ 块构成; $i$ 为任意时刻延迟数; $l$ 为通道数。

根据输出向量  $y(k)$  计算得到其协方差矩阵  $\Lambda_i \in R^{l \times l}$ ,即

$$\Lambda_i = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} y(k+i) y^T(k) \quad (7)$$

构造从  $\Lambda_1$ 到  $\Lambda_i$ 的输出协方差矩阵  $T_{1|i} \in R^{li \times i}$

$$T_{1|i} = Y_f Y_p^T = \begin{bmatrix} \Lambda_i & \Lambda_{i-1} & \cdots & \Lambda_1 \\ \Lambda_{i+1} & \Lambda_i & \cdots & \Lambda_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Lambda_{2i-1} & \Lambda_{2i-2} & \cdots & \Lambda_i \end{bmatrix} \quad (8)$$

随机离散状态空间模型有如下关联性

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{i-1} \mathbf{G} \quad (9)$$

其中:  $\mathbf{A}_d \in R^{2n \times 2n}$ 、 $\mathbf{C}_d \in R^{l \times 2n}$ 和 $\mathbf{G} \in R^{n \times l}$ 分别为离散系统、输出矩阵和关系矩阵;  $n$ 为系统阶数。

将式(7)与式(9)代入式(8)并整理分块,得

$$\begin{cases} T_{1i} = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{O}_i \\ \mathbf{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d \\ \vdots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{i-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{O}_i = [\mathbf{A}_d^{i-1} \mathbf{G} \quad \cdots \quad \mathbf{G}] \end{cases} \quad (10)$$

其中:  $\mathbf{\Gamma}_i \in R^{li \times 2n}$ ,为可观性矩阵;  $\mathbf{O}_i \in R^{2n \times li}$ ,为可控翻转矩阵。

与 $T_{1i}$ 类似,构造从 $\mathbf{A}_2$ 到 $\mathbf{A}_{i+1}$ 的输出协方差矩阵 $T_{2i+1} \in R^{li \times li}$ ,即

$$T_{2i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i+1} & \cdots & \mathbf{A}_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{2i} & \cdots & \mathbf{A}_{i+1} \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{A}_d \mathbf{O}_i \quad (11)$$

$T_{1i}$ 矩阵通过奇异值分解,即

$$\begin{cases} T_{1i} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} \\ T_{1i} = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2} \\ \mathbf{O}_i = \mathbf{S}_1^{1/2} \mathbf{V}_1^T \end{cases} \quad (12)$$

其中:  $\mathbf{U}$ 、 $\mathbf{V} \in R^{li \times li}$ ,为正交阵;  $\mathbf{S} \in R^{li \times li}$ ,为对角阵;  $\mathbf{S}_1 \in R^{2n \times 2n}$ ,为 $\mathbf{S}$ 的左上构成;  $\mathbf{U}_1$ 、 $\mathbf{V}_1 \in R^{li \times 2n}$ ,为 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 的左边构成;  $\mathbf{S}_2$ 、 $\mathbf{U}_2$ 和 $\mathbf{V}_2$ 分别为 $\mathbf{S}$ 、 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 的右下、右、右边构成。

计算 $\mathbf{A}_d$ 和 $\mathbf{C}_d$ ,进而得到 $\mathbf{A}_c$ ,对 $\mathbf{A}_c$ 进行特征值分解,从而获得系统特征向量矩阵 $\tilde{\Psi}$ 和特征值矩阵 $\mathbf{\Lambda}_c$ ,即

$$\begin{cases} \mathbf{C}_d = \mathbf{\Gamma}_i(1:l,:) \\ \mathbf{A}_d = \mathbf{\Gamma}_i^\dagger T_{2i+1} \mathbf{O}_i^\dagger = \mathbf{S}_1^{-1/2} \mathbf{U}_1^T T_{2i+1} \mathbf{V}_1 \mathbf{S}_1^{-1/2} \\ \mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_c \Delta t} \\ \mathbf{A}_c \tilde{\Psi} = \tilde{\Psi} \mathbf{\Lambda}_c \\ \mathbf{\Lambda}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}^* \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_i) \\ \lambda_r, \lambda_r^* = -\sigma_r \pm j\omega_{dr} \end{cases} \quad (13)$$

其中:  $(\cdot)^\dagger$ 表示广义逆;  $\mathbf{A}_c$ 为连续系统矩阵;  $(\cdot)^*$ 表示共轭;  $\lambda_r$ 、 $\lambda_r^*$ 为第 $r$ 阶共轭复特征值;  $\sigma_r$ 、 $\omega_{dr}$ 分别为实

部和虚部;  $e$ 为自然常数。

计算得到 $r$ 阶自振圆频率 $\tilde{\omega}_r$ 、 $r$ 阶广义阻尼比 $\tilde{\xi}_r$ 和复振型矩阵 $\bar{\Phi} \in C^{l \times m}$ ,即

$$\begin{cases} \sigma_r = \tilde{\xi}_r \tilde{\omega}_r \\ \omega_{dr} = \tilde{\omega}_r \sqrt{1 - \tilde{\xi}_r^2} \\ \bar{\Phi} = [\bar{\phi}_1 \quad \cdots \quad \bar{\phi}_j \quad \cdots \quad \bar{\phi}_m] = \mathbf{C}_d \tilde{\Psi} \end{cases} \quad (14)$$

其中:  $m$ 为识别出的模态阶数;  $\bar{\phi}_j \in C^{l \times 1}$ ,为第 $j$ 阶振型列向量。

受噪声等因素影响,确定系统模型阶数 $n$ 比较困难。在工程中,通常会令模型取不同的阶数,再次开展模态分析,即稳定图法。同时,也可在图中绘制基于频率点奇异值分解或平均的功率谱密度函数,以协助进行模态参数的识别。

在稳定图中,通过比系统阶数小1阶时对应的自振频率、阻尼比和振型等模态参数的变化百分比是否在规定限值内,来判断本阶系统模型中所识别的模态参数的稳定性,即

$$\begin{cases} (f^{p+1} - f^p)/f^p < z_1\% \\ (\xi^{p+1} - \xi^p)/\xi^p < z_2\% \\ 1 - \text{MAC}(p+1, p) < z_3\% \\ \text{MAC}(p+1, p) = \frac{|\langle \bar{\phi}_r^p, \bar{\phi}_r^{p+1} \rangle|^2}{\langle \bar{\phi}_r^p, \bar{\phi}_r^p \rangle \langle \bar{\phi}_r^{p+1}, \bar{\phi}_r^{p+1} \rangle} \end{cases} \quad (15)$$

其中: 上标 $p$ 为当前系统阶数; 下标 $r$ 为模态阶数;  $\text{MAC}$ 为模态保证准则;  $\langle \cdot \rangle$ 表示向量间的内积;  $|\cdot|$ 表示取模;  $z_1$ 、 $z_2$ 、 $z_3$ 为3类模态参量的限定值。

### 1.3 DBSCAN密度聚类算法

DBSCAN是一种基于密度的聚类算法,该算法不需要事先指定簇的数量,而是根据数据点的密度自动确定簇的形状和大小,通过定义2个参数 $\epsilon$ (邻域半径)和 $\text{MinPts}$ (最小邻域点数),来对数据进行归类划分,并标记得到的核心点、边界点和噪声点。其中,核心点和边界点分别满足如下条件:核心点需满足 $\epsilon$ 邻域内至少有 $\text{MinPts}$ 个点;边界点需满足 $\epsilon$ 邻域内少于 $\text{MinPts}$ 个点,并位于核心点的 $\epsilon$ 邻域内;剩余点则为噪声点<sup>[17,20]</sup>。DBSCAN流程见图1。

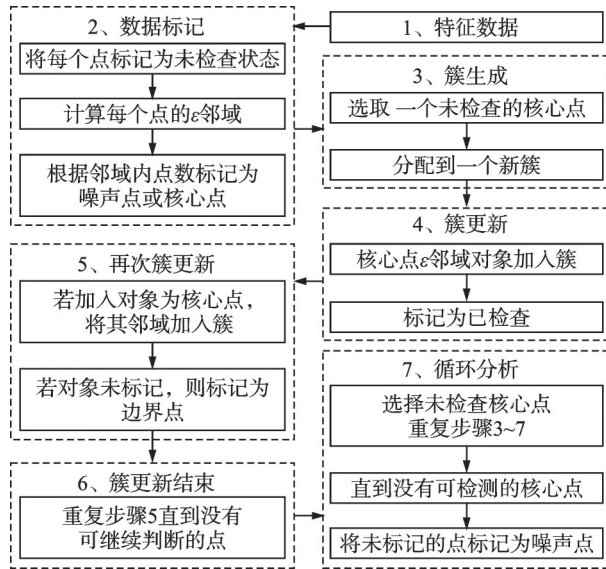


图 1 DBSCAN 流程图

Fig.1 Process diagram for DBSCAN

1.4 自主工作模态参数识别流程

当前,扫描式激光多普勒测振仪(scanning laser Doppler vibrometer, 简称 SLDV)作为一种先进的非接触式振动测试工具,利用激光技术和多普勒效应实现对结构振动速度的非接触高精度测量,提高了测试效率和精度<sup>[21-24]</sup>。SLDV 通常配备 1 个激光测振通道和 1 个参考通道,因此在进行测试任务时需要进行分组测试。另外,由于传感器和采集设备接口的局限性,接触式测试也常常需要通过分组测试来完成。

在多分组测试的情况下,使用 SSI-cov 进行模态参数识别时,可能会出现不同组数据识别到的模态阶数不一致的情况。为了解决这一问题,本研究提出了一种双 DBSCAN 的 AOMA 方法,其模态参数识别流程如图 2 所示。

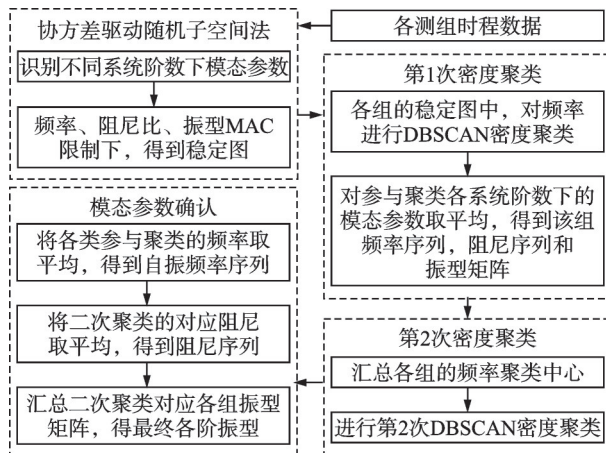


图 2 模态参数识别流程图

Fig.2 Process diagram for identifying mode parameters

所提方法中,SSI-cov 与 DBSCAN 需要预先指定一些关键参数。这些参数包括 SSI-cov 方法中的时刻延时数  $i$ 、最大系统阶数  $n$ 、自振频率、阻尼比及振型限定值  $z_1$ 、 $z_2$  和  $z_3$ ,以及 DBSCAN 算法中的  $\epsilon$  和 MinPts。参数的选择高度依赖于具体工程结构的特性与分析需求。在参考以往经验<sup>[4-5,17,20,25-26]</sup>的基础上,提出如下建议:①  $i$  与  $n$  取值一般在 20~50 之间即可满足分析需求,若结构较为复杂,可适当增大;②  $z_1$ 、 $z_2$ 、 $z_3$  取值通常在 1~5 之间,数值越小对结果的要求越严格,若存在较大噪声,可适当取大值;③ 一次聚类的  $\epsilon$  和 MinPts 可分别根据结构自振频率分布和最大系统阶数进行设置,前者通常取最大关注频率值的 1/300 至 1/100,后者可取  $n/6$  至  $n/3$ ;④ 二次聚类的  $\epsilon$  可取一次聚类  $\epsilon$  的 1 至 2 倍,MinPts 可取测组数的 1/2 至 1。

本研究通过 ABAQUS 软件建立了简支梁桥和钢管混凝土 2 个有限元模型,模拟了多分组模态测试的全流程。在每个模型上进行单测点单参考点的多分组分析和模态参数识别,并将结果与理论值进行了对比。此外,还对等截面连续梁桥和连续刚构桥分别采用激光多普勒测振仪与加速度计开展多分组模态测试,采用单参考点单测点的方式获取速度/加速度响应时程,以验证所提方法的可行性。

2 分析模型

2.1 有限元模型

2.1.1 简支梁桥

在公路梁桥等结构的支座脱空诊断和缺陷检测方面,基于模态参数的方法已引起广泛关注。依托河北唐津高速公路公司“桥梁支座脱空快速诊断与综合评价关键技术研究”项目,参考文献[27]的室内亚克力简支梁桥模型,笔者在 ABAQUS 中建立了简支梁桥的有限元模型,如图 3 所示。上部结构采用 1 200 mm × 500 mm × 10 mm 亚克力板,在其下部设置 6 个支座,对称分布,编号为 1#~6#。两列支座的间距为 1 100 mm,单列支座的间距为 200 mm。支座通过接地弹簧模拟(纵向),全局网格种子设为 20 mm,使用 S4R 单元。

分析步骤如下:①静力通用分析,考虑几何非线性,施加 9.81 m/s<sup>2</sup> 的重力载荷;②频率分析,获取前 9 阶理论模态参数;③模态动力学分析,施加二次扫频激励,时长为 20 s,时间步长为 0.005 s,频率范围为 0~100 Hz,最大力为 5 N。激励点距离梁体长边和短边分别为 50 mm 和 250 mm。

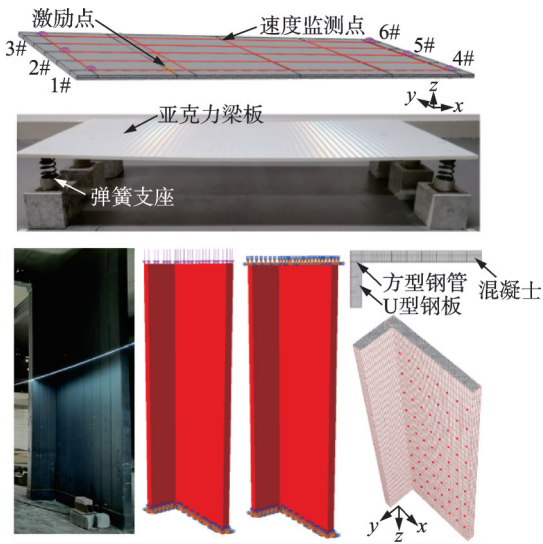


图3 有限元模型

Fig.3 Finite element models

边界条件中,在静力分析时约束一侧板面支座点的水平位移、竖向位移和另外两支座点的水平位移。速度监测点均匀布置,共25个, $y$ 方向间距为100 mm, $x$ 方向间距为200 mm,如图3中红色网格线交点。模态动力学分析中采集垂直板面 $z$ 方向的振动速度时程数据。简支梁桥有限元模型参数见表1。其中: $E$ 、 $\rho$ 、 $\mu$ 、 $k_1 \sim k_6$ 分别为梁体弹性模量、密度、泊松比和6个弹簧支座的纵向刚度。

表1 简支梁桥有限元模型参数

Tab.1 Parameters of finite element model for simply supported beam bridge

$E/$ MPa	$\rho/$ ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	$\mu$	弹簧支座刚度/( $\text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$ )					
			$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$
2 115	1 017	0.282	8.471	8.554	8.629	8.566	8.478	8.624

### 2.1.2 钢管混凝土

“钢管混凝土束剪力墙”由冷弯U型钢或矩形钢拼装而成,在内部浇筑混凝土,属于装配式结构范畴,其中注浆质量是关键指标之一,可用基于模态参数的钢管混凝土束注浆质量进行评价。依托《钢管混凝土束结构技术标准》<sup>[28]</sup>和某保障房建设项目,在ABAQUS软件中建立了“L”型钢管混凝土模型,以验证所提方法在该结构模态参数识别中的有效性。模型水平截面呈“L”型,由U型板和方型钢管焊接而成,型号为Q235钢,剖面尺寸分别为200 mm×150 mm和150 mm×150 mm,壁厚为3 mm,整体高度为5 000 mm,内部填充C50混凝土。网格设置全局种子为20 mm,在高度方向设置局部种子为200 mm,使用的单元为C3D8R。钢管混凝土有

限元模型参数见表2。其中: $E_1$ 、 $\rho_1$ 、 $\mu_1$ 、 $E_2$ 、 $\rho_2$ 和 $\mu_2$ 分别为钢材弹性模量、密度、泊松比、混凝土的弹性模量、密度和泊松比。

表2 钢管混凝土有限元模型参数

Tab.2 Parameters of finite element model for concrete-filled steel tube

钢材			混凝土		
$E_1/$ MPa	$\rho_1/$ ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	$\mu_1$	$E_2/$ MPa	$\rho_2/$ ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	$\mu_2$
206 000	7 850	0.3	34 500	2 500	0.2

静力分析中重力加速度为 $9.81 \text{ m/s}^2$ ,在上端面均布压力50 MPa,打开几何非线性;进行频率分析,获取6阶理论模态参量;采用动力学进行分析,在激励点进行垂直竖向主面的二次扫频激励,时长为30 s,时间增量为0.002 s,频率范围为0~200 Hz,最大值为50 N。

在边界条件上,在静力通用分析时固定底面并延续至后续分析。在频率分析中,将上顶面也进行固定。在竖向主面设置72个采样点, $x$ 方向间隔为200 mm, $y$ 方向间隔为500 mm,获得采样点在模态动力学分析中 $z$ 方向的振动速度。

## 2.2 实测模型

为进一步验证所提方法在更多形式桥梁结构中的有效性,在室内浇筑了混凝土板(C40)作为桥梁的上部结构,用橡胶垫片作为支座,构成了等截面连续梁桥。此外,选取了室外连续刚构桥的一段开展模态试验。混凝土板的截面尺寸为300 mm×40 mm,长度为900 mm。所选的连续刚构桥为多跨连续钢梁结构,材料为Q345,由多个钢梁和钢柱焊接而成。上部结构为C40混凝土面层,整体长度为84 m,宽度为2.3 m。分析中选取了其中一段(长度为7.7 m,宽度为2.0 m),该区段下部四角设有4个钢柱。

### 2.2.1 连续梁桥

参考等截面连续梁桥的结构特点,试验中设置了双跨的边界条件,即设置3列橡胶支座(直径为12 mm、高度为3 mm),共计9个。分组模态测试如图4所示。试验布置见图4(a),通过五角星标记了支座位置并分别编号为#1~#9,支座中心与梁体边缘的距离为30 mm,试验中考虑了支座脱空的条件,将#1和#6支座置于脱空。图中(1)~(7)分别为连续梁桥试样(测点布置)、功率放大器、多普勒控制箱、扫描头、激振器、速度计(竖向)和电脑。共设置

6×15=90个测点,近似均匀布设,x向与y向侧边缘距离分别为8 mm和15 mm,x向两端测点间距为52 mm,内部间距为65 mm;y向测点间距随y的增大依次为3个50 mm和2个60 mm;红色叉号为激振点位置。

针对连续梁桥开展多组工作模态测试,试验中使用了polytec公司的PSV500激光多普勒测振仪和东华2D001V速度计作为信号采集系统,配合SA-JZ005激振器和SA-PA010功率放大器施加扫频激励。每组测试获取了激光多普勒测振仪和速度计的时程数据,其中速度计位置固定,激光多普勒测振仪通过内置镜片偏置以变换测点。试验采样时长为12.8 s,频率为2.5 kHz。

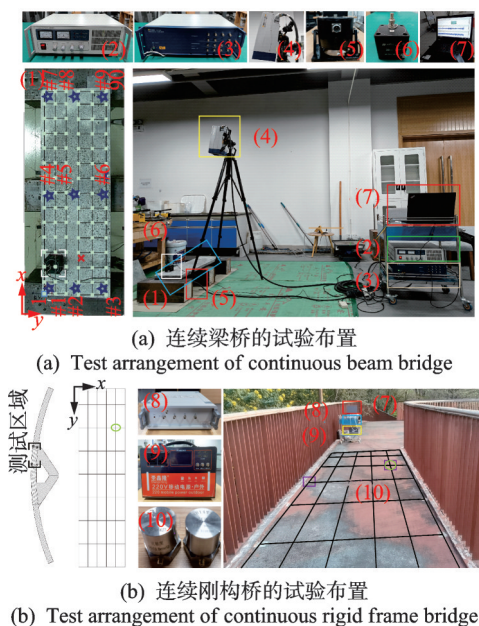


图4 分组模态测试

Fig.4 Grouping modal testing

### 2.2.2 连续刚构桥

连续刚构桥的试验布置如图4(b)所示。针对连续刚构桥,测试采用IEPE加速度传感器,数据由蓝硕LC-200信号采集器采集,使用220 V移动电源与笔记本电脑完成试验。图中(8)~(10)分别为蓝硕LC-200信号采集器、移动电源与IEPE加速度计。2个加速度计分别作为参考通道与测试通道,其灵敏度分别为1 013.8 mV/g和986 mV/g。测点共设置9×6=54个,其横向间距为400 mm,竖向间距从上往下第1个为700 mm,其余为1 000 mm。分为54组进行测试,每次同时获取各测点与参考点垂向振动加速度时程,单点采集时长为239 s。

## 3 模态参数分析

### 3.1 简支梁桥有限元模型

在分析过程中,将第1测点的速度时程作为参考通道数据,其余测点的速度时程作为各组的测试通道数据,共获得了25组数据。通过图2流程进行分析,首先使用SSI-cov法对各组速度响应时程进行初步的模态参数识别,然后对各测组识别结果进行信息整合,获得最终的结构整体模态参数。在识别过程中,按照参数选择建议,设定时刻延时数*i*为30,最大系统阶数*n*为30,并设置自振频率、阻尼比和振型限定值分别为1、1和2<sup>[23-24]</sup>。

简支梁桥有限元模型分析如图5所示。图5(a)展示了部分稳定图分析过程。结果显示,在不同系统阶数下,时程数据识别到了部分相同的模态参数。随着系统阶数的增加,识别结果逐渐趋于稳定,但也伴随有虚假模态的增加。

对各组稳定图的稳定频率进行了DBSCAN密度聚类分析。在分析过程中,设定基于稳定图特

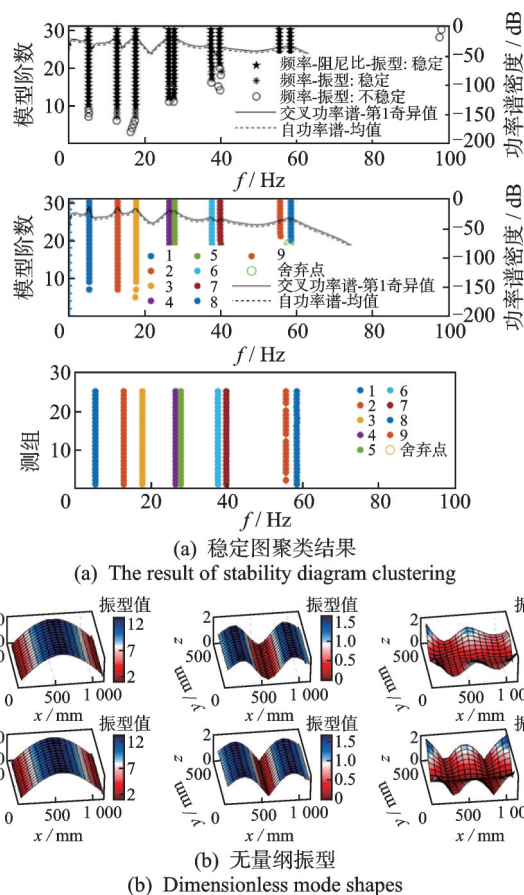


图5 简支梁桥有限元模型分析

Fig.5 Analysis of finite element model for simply supported beam bridge

征的邻域半径  $\epsilon$  为 0.2, 最小邻域点数 MinPts 为 7。图 5(a) 的第 2 幅图展示了第 9 组一次密度聚类的结果, 可以看出, 通过初步的密度聚类, 剔除了稳定图中的部分低质量数据, 得到了各组的稳定数据。接着对各组识别到的各阶自振频率进行了二次 DB-SCAN 密度聚类, 邻域半径  $\epsilon$  为 0.2, 最小邻域点数 MinPts 为 20。图 5(a) 的第 3 幅图展示了聚类结果, 可以看出, 识别出了稳定的 9 阶自振频率。

整理最终识别的自振频率, 并与有限元频率分析理论的自振频率进行对比, 计算识别与理论振型间的模态相对一致性。部分识别的实数振型结果(1 阶、3 阶和 7 阶)如图 5(b) 上面的 3 幅图所示, 其下面

的 3 幅图为各阶对应的理论振型。使用  $15 \times 15$  的双调和样条插值, 对识别的各阶振型和理论的各阶振型均针对参考点进行了归一化处理。图 5(b) 各振型图的  $x$  和  $y$  方向与图 3(a) 一致, 其中:  $z$  轴为无量纲振型。

简支梁桥有限元模型模态参数见表 3。其中:  $\tilde{f}_r$ 、 $MAC_r$  分别为  $r$  阶自振频率、 $r$  阶理论与识别振型 MAC。分析结果表明, 识别频率与理论频率之间的最大误差仅为 0.045%, 约为 0.02 Hz 的差异。识别的振型前 5 阶的 MAC 值在 0.96 以上, 后续阶数的精度略有下降。综上发现, 低阶振型的一致性更高, 在识别过程中更容易获得高精度的结果。

表 3 简支梁桥有限元模型模态参数

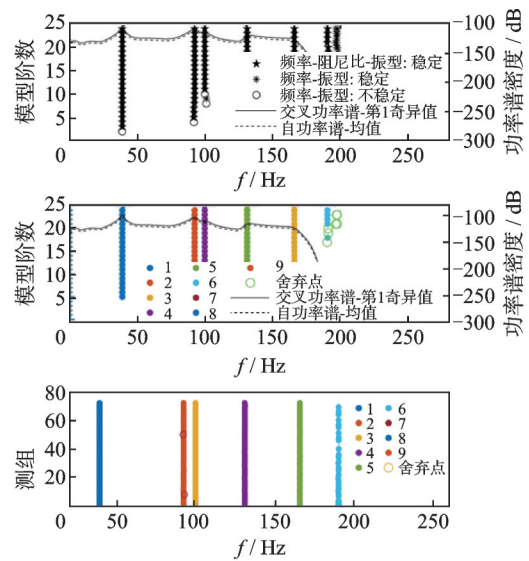
Tab.3 Modal parameters of finite element model for simply supported beam bridge

项目	1 阶	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶	6 阶	7 阶	8 阶	9 阶
$\tilde{f}_r$ 识别值	5.203	12.657	17.537	26.259	27.640	37.382	39.564	55.275	58.122
$\tilde{f}_r$ 理论值	5.205	12.656	17.535	26.253	27.644	37.365	39.554	55.271	58.118
$\tilde{f}_r$ 误差%	-0.039	0.006	0.012	0.022	-0.016	0.045	0.025	0.007	0.006
$MAC_r$	1.000	0.995	0.976	0.986	0.962	0.736	0.834	0.789	0.814

### 3.2 钢管混凝土有限元模型

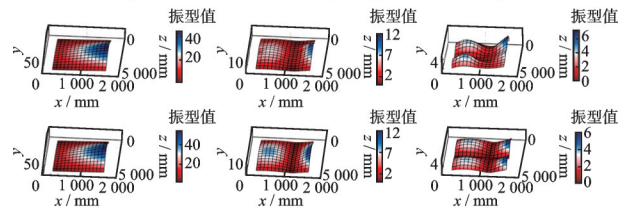
与简支梁桥的有限元模型分析类似, 将速度时程数据分为 72 组。在 SSI-cov 法初步识别模态参数时, 参考参数设置建议, 设定时刻延时数  $i$  为 24, 最大系统阶数  $n$  为 24, 并限定自振频率、阻尼比和振型的阈值为 1、1、2。在一次密度聚类中, 设定邻域半径  $\epsilon$  为 0.2, 最小邻域点数 MinPts 为 6。在二次密度聚类中, 邻域半径  $\epsilon$  为 0.2, 最小邻域点数 MinPts 为 30。钢管混凝土有限元模型分析如图 6 所示。图 6(a) 展示了模态参数识别的 1 组稳定图、5 组一次聚类结果及二次聚类结果。部分振型结果(1 阶、4 阶和 6 阶)如图 6(b) 上面的 3 幅图所示, 其下面 3 幅图为各阶对应的理论振型。使用  $21 \times 21$  的双调和样条插值, 各振型图的  $x$  和  $z$  方向与图 3(b) 一致, 其中:  $y$  轴为无量纲振型。钢管混凝土有限元模型模态参数见表 4。

由图 6(a) 可知, 稳定图筛除了部分虚假模态, 通过一次聚类进一步剔除了不稳定数据, 并通过二次聚类综合各组稳定图的结果, 得到最终的识别参数。表 4 和图 6(b) 显示了部分自振频率、阻尼比和振型的结果, 证明识别结果与理论值具有良好的一致性, 最高自振频率误差为 -0.018%, 约为 0.03 Hz 的差异。



(a) 稳定图聚类结果

(a) The result of stability diagram clustering



(b) 无量纲振型

(b) Dimensionless mode shapes

图 6 钢管混凝土有限元模型分析

Fig.6 Analysis of finite element model concrete-filled steel tube

表 4 钢管混凝土有限元模型模态参数

Tab.4 Modal parameters of finite element model for concrete-filled steel tube

项目	1阶	2阶	3阶	4阶	5阶	6阶
$\tilde{f}_r$ 识别值	38.675	92.095	99.595	130.923	165.819	190.505
$\tilde{f}_r$ 理论值	38.674	92.102	99.596	130.910	165.810	190.540
$\tilde{f}_r$ 误差%	0.003	-0.007	-0.001	0.010	0.006	-0.018
$MAC_r$	1.000	0.996	0.993	0.986	0.989	0.899

3.3 连续梁桥

对连续梁桥采用 SSI-cov 法识别模态参数时,参考参数设置建议,取时刻延时数  $i$  为 45,最大系统阶数  $n$  为 30,取自振频率、阻尼比和振型限定值分别为 5、5、5。一次密度聚类中取邻域半径  $\epsilon$  为 1,最小邻域点数 MinPts 为 10。二次密度聚类取邻域半径  $\epsilon$  为 2,最小邻域点数 MinPts 为 30。

连续梁桥分析如图 7 所示。模态参数识别的稳定图、一次聚类结果和二次聚类结果如图 7(a) 所示。将识别结果与使用最小二乘复指数法 (least square complex exponential method, 简称 LSCE) 的试验模态测试方法进行对比,最终的连续梁桥模态参数见表 5。图 7(b) 展示了部分振型结果 (1 阶、2 阶和 3 阶)。使用  $15 \times 6$  的双调和样条插值,各振型

图的  $x$  和  $y$  方向与图 4(a) 相一致,其中  $z$  轴为无量纲振型。

由表 5 可以看出,2 种方法在振型结果上具有良好的一致性。在自振频率上,SSI-cov 法的工作模态分析结果略偏小,这可能受到速度计附加质量的影响。图 7(a) 显示出良好的聚类效果,表明该方法能够有效整合模态参数。

表 5 连续梁桥模态参数

Tab.5 Modal parameters of continuous beam bridge

项目	1阶	2阶	3阶
$\tilde{f}_r$ 的 SSI-cov 识别	29.393	51.197	82.570
$\tilde{f}_r$ 的 LSCE 分析	30.800	53.600	80.500
$MAC_r$	0.993	0.905	0.943

3.4 连续刚构桥

在连续刚构桥的分组模态测试中,共有 54 组数据,每组为单参考通道和单测试通道,采集的信号为加速度时程。在用 SSI-cov 法初步识别模态参数时,参考参数设置建议,取时刻延时数  $i$  为 40,最大系统阶数  $n$  为 30,取自振频率、阻尼比和振型限定值分别为 1、5、2。

一次密度聚类中取邻域半径  $\epsilon$  为 0.2,最小邻域点数 MinPts 为 4。二次密度聚类中,取邻域半径  $\epsilon$  为 0.4,最小邻域点数 MinPts 为 20。连续刚构桥分析如图 8 所示。模态参数识别的 1 组稳定图、5 组一次聚类结果和二次聚类结果如图 8(a) 所示。最终的连续刚构桥模态参数见表 6。图 8(b) 展示了部分振型结果 (1 阶、2 阶和 3 阶)。使用  $21 \times 21$  双调和样条插值,图 8(b) 的  $x$  和  $y$  方向与图 4(b) 一致,其中  $z$  为无量纲振型。

由图 8(a) 可知,在刚构桥的稳定图中,存在未剔除的虚假模态。一次聚类只能部分剔除虚假模态,但通过综合各组信息的二次聚类,可以识别出各组共有特性,并最终确定整体的模态参数。根据表 6 和图 8,使用该方法可识别出刚构桥结构 5 阶自振频率和振型等模态参数。振型呈现良好的正/反对称特性,符合板状结构特征 (与刚构桥支撑边界条件较一致),在一定程度上验证了方法的可行性。

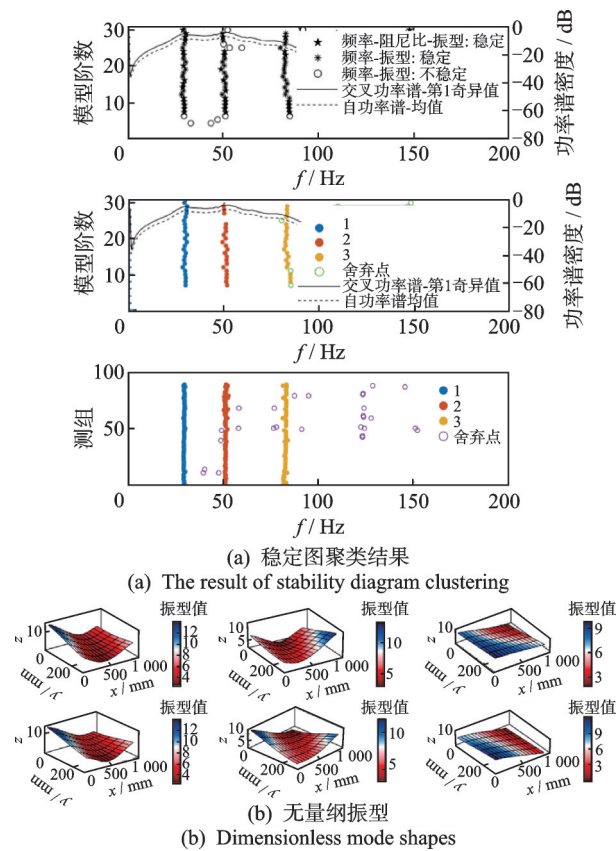


图 7 连续梁桥分析

Fig.7 Analysis of continuous beam bridge

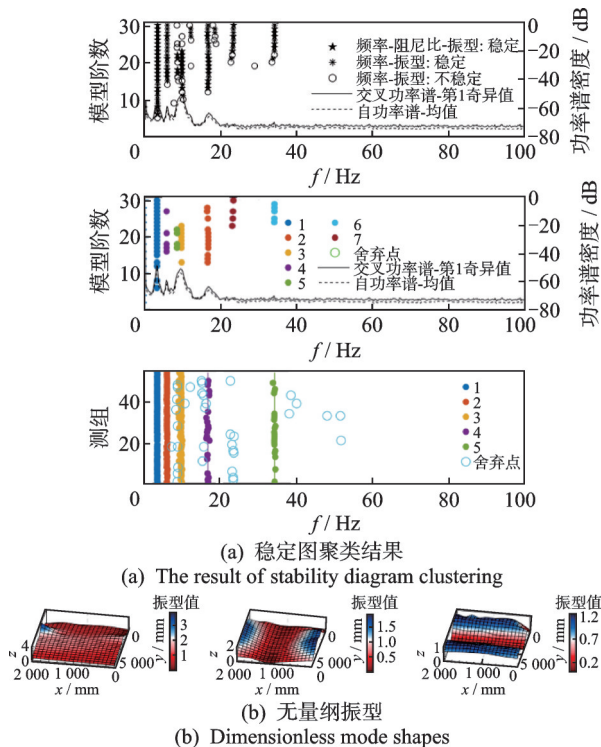


图8 连续刚构桥分析

Fig.8 Analysis of continuous rigid frame bridge

表6 连续刚构桥模态参数

Tab.6 Modal parameters of continuous rigid frame bridge

项目	1阶	2阶	3阶	4阶	5阶
$\tilde{f}_r$ 识别值	3.321	5.902	9.514	16.658	34.112

## 4 结论

1) 双重密度聚类方法在桥梁和钢管混凝土结构的分组测试模态分析中展现了良好的稳定性和精确性。所识别出的模态参数,特别是低阶自振频率和振型,与理论和试验模态分析结果高度一致,证明了方法在工程中的可行性。

2) 本研究方法剔除了大量的虚假模态参数,解决了分组测试结果不一致的问题,使各测组的模态信息得到充分整合,为结构工程领域提供了理论和实践价值。

3) 该方法对参数设置的敏感性较低,操作难度小,只需预设参数即可实现模态参数的自动识别,为非接触激光多普勒测振技术的应用提供了支持。

## 参 考 文 献

[1] 朱锐, 杭晓晨, 姜东, 等. 基于奇异值分解的ERA改进算法及模态定阶[J]. 振动、测试与诊断, 2018, 38(1): 115-122. ZHU Rui, HANG Xiaochen, JIANG Dong, et al. Im-

proved ERA algorithm and modal order determination based on singular value decomposition[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2018, 38(1): 115-122.(in Chinese)

[2] 张云龙, 张家源, 钱雪松, 等. 环境激励下桥梁模态参数识别的频谱方法综述[J]. 吉林大学学报(工学版), 2023, 53(6): 1580-1591. ZHANG Yunlong, ZHANG Jiayuan, QIAN Xuesong, et al. Spectrum-driven methods for modal parameter identification of bridge under environmental excitation [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2023, 53(6): 1580-1591. (in Chinese)

[3] 杨志林, 罗漪, 王海峰. 基于数据库的优化随机子空间法识别精度评价[J]. 工程力学, 2023, 40(4): 116-128, 192. YANG Zhilin, LUO Yi, WANG Haifeng. Identification accuracy evaluation of optimized random subspace method based on database [J]. Engineering Mechanics, 2023, 40(4): 116-128, 192. (in Chinese)

[4] 赵丽洁, 高晓建, 练继建. 协方差驱动随机子空间辨识的参数敏感性分析[J]. 噪声与振动控制, 2024, 44(1): 29-36. ZHAO Lijie, GAO Xiaojian, LIAN Jijian. Parameter sensitivity analysis of covariance-driven stochastic subspace identification [J]. Noise and Vibration Control, 2024, 44(1): 29-36. (in Chinese)

[5] 刘威, 杨娜, 白凡, 等. 基于敏感性分析的协方差随机子空间方法参数优化[J]. 工程力学, 2021, 38(2): 157-167, 178. LIU Wei, YANG Na, BAI Fan, et al. Parameter optimization of covariance-driven stochastic subspace identification method based on sensitivity analysis [J]. Engineering Mechanics, 2021, 38(2): 157-167, 178. (in Chinese)

[6] WANG P, CHEN J. Floor modal mass identification using human-induced dynamic excitation[J]. Measurement, 2023, 217: 113038.

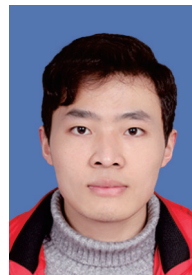
[7] YE S, LAI X A, BARTOLI I, et al. Technology for condition and performance evaluation of highway bridges [J]. Journal of Civil Structural Health Monitoring, 2020, 10(4): 573-594.

[8] LI S, WANG J T, JIN A Y, et al. Parametric analysis of SSI algorithm in modal identification of high arch dams [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2020, 129: 105929.

[9] 孟金伟. 工作模态分析技术和系统研究[D]. 北京: 华北电力大学, 2022.

[10] 宋明亮, 苏亮, 董石麟, 等. 模态参数自动识别的虚假模态剔除方法综述[J]. 振动与冲击, 2017, 36(13): 1-10. SONG Mingliang, SU Liang, DONG Shilin, et al. Summary of methods eliminating spurious modes in au-

- tomatic modal parametric identification [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(13): 1-10. (in Chinese)
- [11] 康杰, 王寅, 罗杰, 等. 自主工作模态分析方法研究综述[J]. *机械工程学报*, 2023, 59(13): 89-109.  
KANG Jie, WANG Yin, LUO Jie, et al. Automated operational modal analysis method: a survey [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2023, 59(13): 89-109. (in Chinese)
- [12] CIVERAM, MUGNAINIV, ZANOTTIFRAGONARA L. Machine learning-based automatic operational modal analysis: a structural health monitoring application to masonry arch bridges [J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2022, 29(10): e3028.
- [13] CHO K, CHO J R. Stochastic subspace identification-based automated operational modal analysis considering modal uncertainty [J]. *Applied Sciences*, 2023, 13(22): 12274.
- [14] 王世东, 任伟新. 应变功率谱密度传递比与工作应变模态参数识别 [J]. *振动工程学报*, 2022, 35(4): 806-813.  
WANG Shidong, REN Weixin. Strain power spectrum density transmissibility and operational strain modal parameter identification [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2022, 35(4): 806-813. (in Chinese)
- [15] 张超, 邓扬, 李爱群, 等. 基于智能算法的稳定点自动分析方法研究 [J]. *振动、测试与诊断*, 2025, 45(1): 65-72.  
ZHANG Chao, DENG Yang, LI Aiqun, et al. Automatic analysis method of stable poles based on intelligent algorithm [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2025, 45(1): 65-72. (in Chinese)
- [16] 胡志祥, 程成, 胥河阳, 等. 基于谱聚类的随机子空间模态参数自动识别 [J/OL]. *工程力学*, 2024: 1-13. (2024-01-09) [2024-03-24]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2595.o3.20240108.1345.012.html>.  
HU Zhixiang, CHENG Cheng, XU Heyang, et al. Automatic identification of modal parameters in random subspaces based on spectral clustering [J/OL]. *Engineering Mechanics*, 2024: 1-13. (2024-01-09) [2024-03-24]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2595.o3.20240108.1345.012.html>. (in Chinese)
- [17] 单豪良, 陈永高, 孙泽阳. 基于DBSCAN算法的改进确定-随机子空间模态参数识别算法 [J]. *振动与冲击*, 2022, 41(11): 156-163.  
SHAN Haoliang, CHEN Yonggao, SUN Zeyang. Improved determination random subspace modal parameter identification algorithm based on DBSCAN algorithm [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2022, 41(11): 156-163. (in Chinese)
- [18] 王树青, 田晓洁. 结构振动测试与模态识别 [M]. 青岛: 中国海洋大学出版社, 2021: 77-81, 301-307.
- [19] 禹丹江. 土木工程结构模态参数识别 [D]. 福州: 福州大学, 2006.
- [20] 宋金玉, 郭一平, 王斌. DBSCAN聚类算法的参数配置方法研究 [J]. *计算机技术与发展*, 2019, 29(5): 44-48.  
SONG Jinyu, GUO Yiping, WANG Bin. Research on parameter configuration method of DBSCAN clustering algorithm [J]. *Computer Technology and Development*, 2019, 29(5): 44-48. (in Chinese)
- [21] 宋安平. 连续扫描激光多普勒测振技术及模态分析方法研究 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2017.
- [22] LYU L F, YUAN K, ZHU W D. A novel demodulation method with a reference signal for operational modal analysis and baseline-free damage detection of a beam under random excitation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2024, 571: 118068.
- [23] 张琦, 王洪斌, 姜睿, 等. 基于激光多普勒测振的叶片振动特性试验 [J]. *航空发动机*, 2022, 48(1): 76-82.  
ZHANG Qi, WANG Hongbin, JIANG Rui, et al. Experiment on blade vibration characteristics based on laser doppler vibration measurement [J]. *Aeroengine*, 2022, 48(1): 76-82. (in Chinese)
- [24] 程侯. 基于连续扫描方式激光多普勒超远距离测振技术研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2020.
- [25] SUN S, YANG B, ZHANG Q, et al. Fast online implementation of covariance-driven stochastic subspace identification [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, 197: 110326.
- [26] POURGHOLI M, MOHAMMADZADEH-GILARLUE M, VAHDAINI T, et al. Influence of hankel matrix dimension on system identification of structures using stochastic subspace algorithms [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, 186: 109893.
- [27] 陈红霞. 公路梁桥支座的损伤识别方法研究 [D]. 天津: 河北工业大学, 2016.
- [28] 杭萧钢构股份有限公司. T/CECS 546—2018 钢管混凝土束结构技术标准 [S]. 北京: 中国计划出版社, 2018.



**第一作者简介:** 马世纪, 男, 2000年1月生, 博士生。主要研究方向为结构健康监测。曾发表《Bridge-bearing disengagement identification based on flexibility matrix diagonal matrix change rate: an indoor physical simulation experiment》(《Structural Health Monitoring》2024, Vol.23, No.3) 等论文。

E-mail: d202310007@xs.ustb.edu.cn

**通信作者简介:** 李庆文, 男, 1986年11月生, 博士、教授。主要研究方向为岩石力学、岩石动力学及能源地下结构。

E-mail: qingwenli@ustb.edu.cn