

部分覆盖主动阻尼梁的振动控制仿真研究*

黄志诚¹, 程扬¹, 王兴国¹, 褚福磊²

(1. 景德镇陶瓷大学机电工程学院 景德镇, 333000)

(2. 清华大学机械工程系 北京, 100084)

摘要 以部分覆盖主动约束层阻尼(active constrained layer damping, 简称 ACLD)梁为研究对象,对其振动主动控制进行研究。首先,将有限元法和黏弹性(golla hughes mctavish, 简称 GHM)模型相结合,建立了结构的非线性动力学模型,并基于哈密顿原理推导出模型的控制方程;其次,采用物理空间动态缩聚和状态空间复模态解耦法进行结构模型降阶,同时消除控制系统中不可观不可控的自由度,采用线性二次型最优控制(linear quadratic regulator, 简称 LQR)方法拟定控制参数,设计出有效的控制系统;最后,研究了主动阻尼贴片的位置和覆盖率对结构减振的控制效果及对主动控制的影响。结果表明,不同贴片覆盖率和位置对于振动控制效果有明显区别,主动约束层阻尼贴片位置略靠近固定端和 4/7 覆盖率的贴片对主动控制的效率提升最显著。

关键词 主动约束层阻尼;部分覆盖;振动主动控制;有限元;黏弹性材料

中图分类号 TB535;TB381

引言

主动约束层阻尼结构兼具被动约束层阻尼与主动控制的优点,是一种性能优良的融合了主、被动混合控制技术的新型智能结构。其有 2 种不同的阻尼机理:①主动阻尼采用主动控制策略,通过控制器合理调节压电约束层的变形,以增大黏弹性材料层的剪切变形,从而增加其对结构振动能量的耗散;②被动阻尼,当控制器不起作用时,结构即退化为无条件稳定的被动约束层阻尼结构,以保证系统的安全性与稳定性。这种结构具有轻、薄及刚度强的特性,被广泛应用于航空航天和汽车工业^[1-2],许多学者关注此结构振动主动控制的研究^[3-4]。

主动约束层阻尼由 Baz 等^[5]提出,相比于被动阻尼,主动阻尼将顶层的弹性约束层更换成智能压电约束层,通过正逆压电效应施加控制电压,可以更加有效地提升被动阻尼的减振性能,同时通过黏弹性层的耗散特性将振动能量转化为热能耗散,提高了主动控制的效果^[6-7]。Shi 等^[8]将有限元法和 GHM 模型相结合,对 ACLD 梁结构进行完整建模,并采用 LQG 控制器进行了控制振动。石慧荣等^[9]对 ACLD 简支梁结构提出一种分段线性二次规划的主动控制方法,取得了明显的减振效果。Lu 等^[10]通过实验和仿真研究了复合夹层梁的低频振动,采用自

适应的主动控制方案对夹层梁进行振动控制。

全覆盖 ACLD 贴片往往不是最佳的减振选择,而部分覆盖则有着更多的研究意义。Yaman^[11]研究了 ACLD 贴片的覆盖率对损耗因子的影响,通过实验得知 ACLD 处理的梁,其贴片覆盖率达到 50% 时可获得一阶模态的最大阻尼。Zheng 等^[12]将 ACLD 贴片分成不同长度,研究了其阻尼的影响。Zhang 等^[13]对夹层板结构进行了部分覆盖 ACLD 贴片的优化。Hou 等^[14]研究了 ACLD 贴片厚度对部分覆盖梁损耗因子的影响。Zoghaib 等^[15]研究发现,当 ACLD 贴片较大时,贴片的位置对振动的影响不大。Gao 等^[16]研究表明,随着 ACLD 贴片的覆盖率变小,其损耗因子也相应变小,但固有频率变大。

在考虑部分 ACLD 贴片覆盖的问题中,多数研究倾向于对结构进行被动属性的分析,如固有频率和损耗因子等^[16],而缺乏主动控制减振的研究。笔者基于哈密顿原理和一阶剪切变形理论,建立了黏弹性夹层梁的有限元模型,通过改变覆盖 ACLD 贴片的位置和长度,发现 ACLD 贴片的覆盖率从 2/7 梁长度逐渐到全覆盖的振动过程中,随着覆盖率越高,被动阻尼对振动的衰减效果越明显,但主动控制有所差异。本研究通过编写 Matlab 程序对结构进行建模与仿真实验,采用 LQR 调节器对其进行振动主动控制,通过振动分析比较了不同结构对于主动

* 国家自然科学基金资助项目(11862007,52265020);景德镇陶瓷大学研究生创新专项资金资助项目(JYC202224)
收稿日期:2023-04-14;修回日期:2023-08-02

控制率的影响,比较主动振动控制与被动振动控制系统在性能上的差异,同时还研究了如何划分主动阻尼贴片来提高减振效果。通过对比分析发现,采用合适的主动控制策略可以有效降低系统的响应频率。

1 阻尼夹层梁有限元建模

1.1 主动阻尼梁单元

本研究所考虑的有限元梁模型为 2 节点 8 自由度单元,从上到下依次为压电层、黏弹性层和基梁层,其中基梁层和压电层可以看作 Euler-Bernoulli 梁。假设 3 层完美黏贴无相对位移,分别为压电约束层纵向位移、基梁层纵向位移、梁的横向变形(挠度)和两单元节点转角。夹层梁单元模型如图 1 所示。

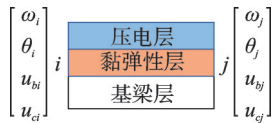


图 1 夹层梁单元模型

Fig.1 Sandwich beam element model

主动阻尼单元位移矢量为

$$V^e = \{\omega_i \ \theta_i \ u_{bi} \ u_{ci} \ \omega_j \ \theta_j \ u_{bj} \ u_{cj}\}^T \quad (1)$$

主动阻尼约束单元中的节点位移可用插值函数 N 表示,即

$$V^e = [\omega \ \theta \ u_b \ u_c]^T = NV^e \quad (2)$$

根据单元能量的关系,各层的拉伸动能和弯曲动能表示为

$$\frac{1}{2} \dot{V}^{eT} M_{qi} \dot{V}^e M_{qi} = \rho_q S_q \int_0^l N_{uq}^T N_{uq} dx \quad (3)$$

其中: i 和 j 为单元的 2 个节点; ρ 为对应材料的密度; S 为单元横截面积。

主动阻尼梁的单元总势能 U 和总动能 $T^{(17)}$ 可以写成

$$U^e = U_{ci} + U_{cj} + U_{bi} + U_{bj} + U_{sv} \quad (4)$$

$$T^e = T_{ci} + T_{cj} + T_{bi} + T_{bj} + T_{vi} + T_{vj} \quad (5)$$

其中:下标 b、c、v 分别代表基梁层、黏弹性层和压电层。

由于黏弹性材料的参数随频率的变化而变化^[18],因此本研究选用 GHM 模型表示黏弹性材料的参数。GHM 模型在拉氏变换之后的表达式为

$$\nabla^2 \tilde{G}(\nabla^2) = G^\infty \left[1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k \frac{s^2 + 2\hat{\xi}_k \hat{\omega}_k s}{s^2 + 2\hat{\xi}_k \hat{\omega}_k s + \hat{\omega}_k^2} \right] \quad (6)$$

其中: ∇^2 为拉普拉斯算子; α_k 、 $\hat{\omega}_k$ 、 $\hat{\xi}_k$ 为 3 组正常数,其确定了每项微振子的效应。

1.2 动力学方程

根据哈密顿原理,其变分形式为

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (7)$$

基于哈密顿变分原理和有限元能量方程,将式(4)、式(5)代入式(7),可推导出主动阻尼梁的动力学方程为

$$M^e \ddot{V}^e + K^e V^e + K_v V^e = f^e \quad (8)$$

其中: M 为单元质量矩阵; K 为单元刚度矩阵; f^e 为压电控制力。

f^e 的表达式为

$$f^e = E_c d_{31} b v(t) [0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \quad (9)$$

将动力学方程引入耗散坐标后进行拉氏逆变换,整理后可得其在时域中的表达式为

$$\tilde{M} \ddot{q} + \tilde{D} \dot{q} + \tilde{K} q = \tilde{f} \quad (10)$$

其中:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} M^e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1}{\hat{\omega}_1^2} \mathbf{\Delta} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\alpha_N}{\hat{\omega}_N^2} \mathbf{\Delta} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\hat{\xi} \frac{\alpha_1}{\hat{\omega}_1} \mathbf{\Delta} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 2\hat{\xi}_N \frac{\alpha_N}{\hat{\omega}_N} \mathbf{\Delta} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K^e + \tilde{k} \left(1 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \right) & -\alpha_1 \mathbf{R} & \cdots & -\alpha_N \mathbf{R} \\ -\alpha_1 \mathbf{R}^T & \alpha_1 \mathbf{\Delta} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_N \mathbf{R}^T & 0 & \cdots & \alpha_N \mathbf{\Delta} \end{bmatrix};$$

$$q = \begin{Bmatrix} x \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_N \end{Bmatrix}; \tilde{f} = \begin{Bmatrix} f^e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \tilde{k} = G^\infty K_v^e, K_v^e = \mathbf{R}_v \mathbf{\Delta}_v \mathbf{R}_v^T, \mathbf{\Delta}_v \text{ 为}$$

由黏弹性层 K_v^e 的正特征值组成的对角矩阵; \mathbf{R}_v 为 K_v^e 对应的由特征向量为列组成的特征向量矩阵; $\mathbf{\Delta} = G^\infty K_v^e$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_v \mathbf{\Delta}_v$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_v \mathbf{\Delta}$, $Z_j = \mathbf{R}_v^T \hat{Z}_j$ ($j=1, 2, \dots, N$)。

1.3 模型降阶

1.3.1 物理空间降阶

将 ACLD 单元结构中约束层 x, y, z 方向的线位移作为主自由度, 将其他物理自由度和耗散自由度作为副自由度^[19-20], 从而缩小系统的阶数, 则式(10)可写成

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_m(s) \\ \ddot{X}_s(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{mm} & D_{ms} \\ D_{sm} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_m(s) \\ \dot{X}_s(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_m(s) \\ X_s(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m(s) \\ F_s(s) \end{bmatrix} \quad (11)$$

缩聚后的系统动力学方程为

$$M_E^{(n)} \ddot{X}_m + D_E^{(n)} \dot{X}_m + K_E^{(n)} X_m = F_E^{(n)} \quad (12)$$

1.3.2 状态空间降阶

将物理降阶后的系统转入状态空间^[21], 可以表示为

$$\begin{cases} \dot{Y} = AY + Bf \\ Z = CY \end{cases} \quad (13)$$

其中: $A = \begin{bmatrix} -M_E^{-1} D_E & -M_E^{-1} K_E \\ 0 & I \end{bmatrix}$, 为结构的系统动力学矩阵; $B = \begin{bmatrix} M_E^{-1} F_E \\ 0 \end{bmatrix}$, 为压电控制力矩阵; C 为传感器输出矩阵; f 为系统受到的外部激励; $Y = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ X \end{bmatrix}$ 。

当保留前 n 阶弹性模态时, φ_n 为模态振型 ψ 的前 n 列、 φ_n^{-1} 为 ψ^{-1} 的前 $2n$ 行组成的矩阵, 则式(13)可写成

$$\begin{cases} \dot{\xi}_n = A_n \xi_n + B_n f \\ Z_n = C_n \xi_n \end{cases} \quad (14)$$

其中:

$$A_n = \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \bar{\lambda}_i & & \\ & & & \ddots & \\ \dots & \phi_i & \bar{\phi}_i & \dots & \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \vdots \\ \psi_i \\ \bar{\psi}_i \\ \vdots \end{bmatrix}; C_n = C\varphi_n = [\dots \phi_i \bar{\phi}_i \dots]^T。$$

1.4 主动振动控制

振动控制的核心就是控制器的设计, 合理的控制器和控制参数能直接决定振幅和振动时间。

LQR 即线性二次型调节器, 其最优控制的主要思想是设计出的状态反馈控制器能够使二次型目标函数 J 取最小值^[22], 增益 K 由加权矩阵 Q 和 R 唯一确定, 因此确定 Q 和 R 的参数非常重要。

将 K 代入状态方程可得闭环系统矩阵方程为

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (15)$$

LQR 控制的目标函数 J 的表达式为

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \quad (16)$$

2 模型验证与降阶

2.1 模型验证

为了验证模型的准确性, 本研究通过有限元法采用 2 节点 8 自由度有限元模型对固支-自由边界条件下的黏弹性夹层梁结构进行模型验证。GHM 模型参数为: $G^{\infty} = 5 \times 10^5$ Pa; $\alpha = 6$; $\zeta = 4$; $\omega = 10\,000$ rad/s。材料结构参数见表 1。

表 1 材料结构参数

Tab.1 Material structure parameters

结构	长度/m	宽度/m	厚度/mm	密度/(kg·m ⁻³)	弹性模量/GPa	泊松比	压电常数/(m·V ⁻¹)
基梁层	0.261 6	0.012 7	2.286	7 600	7.4×10 ¹⁰	0.3	
压电层	0.101 6	0.102 7	0.762	7 600	6.67×10 ¹⁰	0.3	-1.75×10 ¹⁰
黏弹性层	0.101 6	0.102 7	0.250	1 250	—	0.3	

结合本研究方法并对比文献中采用 ACLD 单元悬臂梁的固有频率数据来验证模型的精度, 对黏弹性夹层梁进行振动优化分析。

本研究有限元方法计算出的主动阻尼悬臂梁和文献数据的前 4 阶固有频率对比见表 2。由表可知, 本研究方法的误差范围差在 0.25%~3.21% 之间, 达到了工程精度要求。

表 2 前 4 阶固有频率对比

Tab.2 Comparison of the first four natural frequencies

模态	f/Hz		误差/%
	文献[8]	本研究方法	
1	27.90	27.83	0.25
2	150.12	147.83	1.52
3	442.97	429.66	3.00
4	831.76	805.08	3.21

2.2 模型降阶

降阶前后模型对比如图 2 所示。由图可以看出,降阶前后模型的频率吻合准确,模型维数从 108×108 降为 6×6 ,保留了前 3 阶主模态,并且满足控制系统的可观性和可控性。各阶模态为相互独立的实数模态,可直接应用于主动控制器的设计中。

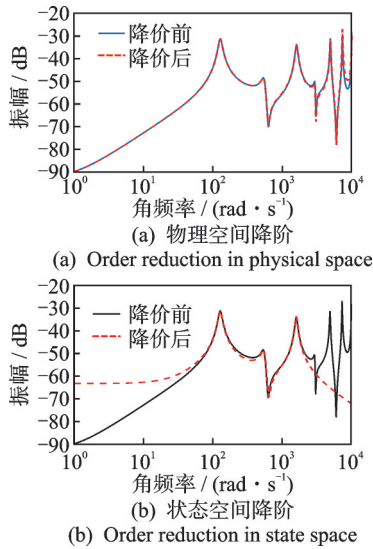


图 2 降阶前后模型对比

Fig.2 Comparison of models before and after order reduction

模型降阶前后固有频率变化见表 3。可以看出,降阶前与降阶后的固有频率几乎不变,其中最低误差为 0,最大误差为 0.056%,平均误差为 0.024%,这说明在降阶前后都准确表达了结构的物理特性。

表 3 模型降阶前后固有频率变化

Tab.3 Natural frequency variation of the mode before and after order reduction

模态	f/Hz		误差/%
	降阶前	降阶后	
1	27.83	27.83	0
2	147.83	147.85	0.013
3	429.66	429.78	0.028
4	805.08	805.53	0.056

3 数值分析

当边界条件为一端固支、一端自由时,将表 1 的基梁长度 L 设置为 0.35 m,宽度为 0.015 m,平均分成 7 个单元,黏弹性层和压电层的长度随着结构变化,其他参数始终保持不变,研究黏弹性夹层梁的 ACLD 贴片位置、长度对前 3 阶模态振型的 LQR 主动控制的影响。

3.1 主动控制参数选择

在主动控制中,合理的控制参数可以达到更好的控制效果并节约控制成本,过度的控制参数可能导致系统不稳定。笔者使用 LQR 控制器对黏弹性夹层梁进行自由振动控制,并对结构施加了初始位移,研究了非控制和控制状态下的振动衰减。

为了确定合适的控制参数,分别对 LQR 的 5 组控制参数 Q 和 R 进行讨论,以选择更优的控制参数。输出为悬臂梁自由端的横向位移响应。

分别从时域和频域分析不同的控制参数对结构产生的控制效果, Q 和 R 变化对 LQR 控制的影响如图 3 所示。由图可以看出,振动主要由结构的第 3 阶

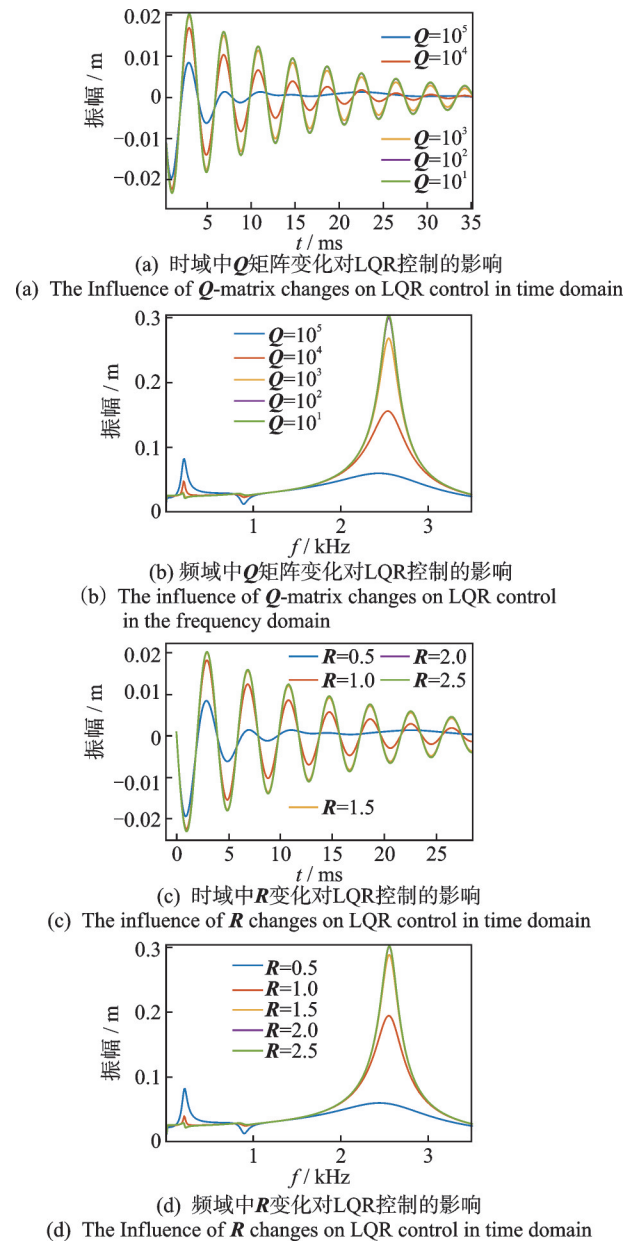


图 3 Q 和 R 变化对 LQR 控制的影响

Fig.3 The influence of Q and R changes on LQR control

振型来提供,前 2 阶的贡献不多。 $Q=1 \times 10^5$ 和 $R=0.5$ 这组参数可以有效限制振动,故后文的振动参数都使用此组数据。

3.2 ACLD 贴片位置对主动振动的影响

ACLD 贴片不同位置悬臂梁结构如图 4 所示。图中 1~6 给出了 6 个不同位置 ACLD 贴片的黏弹性夹层梁结构,1 和 6 位置的 ACLD 贴片分别布置在固定端和自由端,其余 2~5 依次布置在沿 x 方向的 $1/7$ 、 $2/7$ 、 $3/7$ 和 $4/7$ 梁长度处,其中 ACLD 贴片为

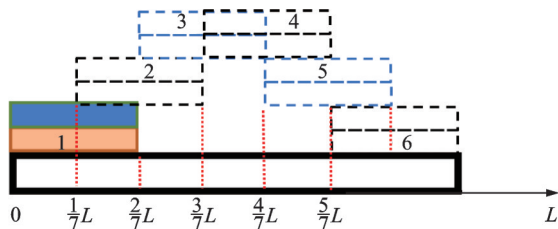


图 4 ACLD 贴片不同位置悬臂梁结构

Fig.4 Cantilever beam structure with different positions of ACLD patches

2 个单元的长度。

笔者使用 LQR 控制器对黏弹性夹层梁进行自由振动控制,研究了非控制和控制状态下的振动衰减。对结构施加了初始位移,输出为悬臂梁自由端的横向位移响应。

不同贴片位置的悬臂梁主动控制振动响应如图 5 所示。由图可知,本研究中这 6 种结构的振动都得到了很好的改善。在相同的控制效果下,图 5(b) 的主动控制效果最好,初始振幅比未控制时减少了 40.1%,振动衰减时间比未控制时减少了 80.2%,减振效果显著;图 5(a) 和 (e) 减振效果略差于图 5(b),振幅峰值和衰减时间分别为 21.31 mm、15.97 mm 和 17.9 ms、17.2 ms;图 5(c)、(d) 和 (f) 的减振效果差于其他结构。由图还可看出,贴片靠近固定端的结构在主动控制性能上要略优于靠近自由端的贴片,该结果和理论相吻合^[23]。

图 5 结果表明,ACLD 贴片在结构上的位置对于振动主动控制效果具有较大的影响,合理布设贴片位置能够有效提升减振效果。

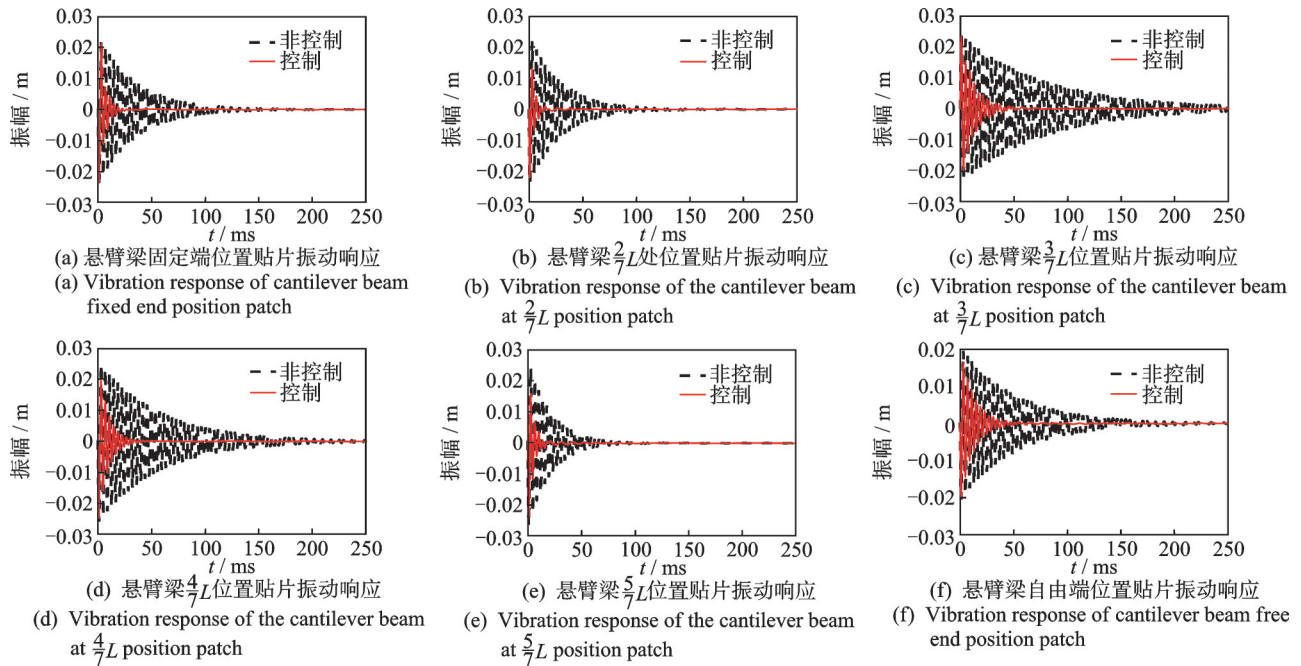


图 5 不同贴片位置的悬臂梁主动控制振动响应

Fig.5 Active control vibration response of cantilever beam with different patches Positions

3.3 ACLD 贴片长度对振动主动控制的影响

ACLD 贴片不同长度悬臂梁结构如图 6 所示。ACLD 贴片长度从 $0.1 \text{ m} (\frac{2}{7}L)$ 逐渐增加到 $0.35 \text{ m} (L)$, ACLD 单元长度每次增加 $0.05 \text{ m} (\frac{1}{7}L)$, 直到完全覆盖,其他参数与前文相同。

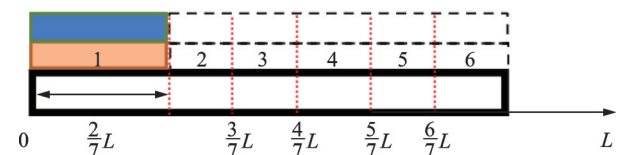


图 6 ACLD 贴片不同长度悬臂梁结构

Fig.6 Cantilever beam structure with different lengths of ACLD patches

不同贴片长度的悬臂梁主动控制振动响应如图7所示。由图可以看出,随着ACL D贴片长度的增加,未控制的振动衰减趋势明显。贴片长度为0.1 m的结构和全覆盖相比,振动衰减时间降低了76.8%。但是,主动控制效果并不是贴片越多效果

越好。图7(c)中, $\frac{4}{7}L$ 贴片的主动振动衰减效果最佳,衰减时间为0.01 s,振动峰值为8.412 mm,图7(e)和(f)的主动控制效果略差于图7(c);图7(f)在振动衰减时间上略优于图7(c),但最大振幅却高出20.64%。

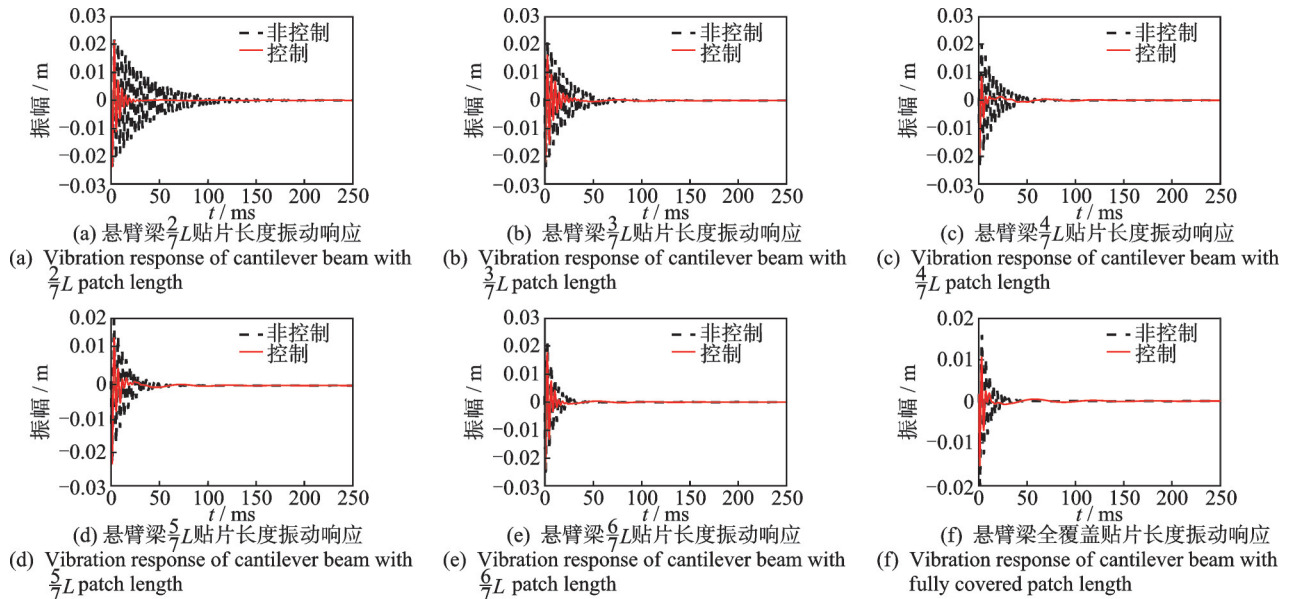


图7 ACLD贴片不同长度悬臂梁结构

Fig.7 Cantilever beam structure with different lengths of ACLD patches

图7结果表明,ACL D贴片的长度对于主动振动控制的影响不是绝对的。合适的贴片长度能够更好地发挥主动阻尼夹层的减振性能,过长的贴片可能会导致减振效果下降,甚至导致材料的浪费。因此,对于不同的工程问题需要具体分析,合理布置ACL D贴片。

4 结论

1) 物理空间和状态空间的联合降阶是精准和有效的,且对于模型的前3阶模态特性保留的精度较高。

2) ACL D贴片对于结构减振效果都有很大改善,贴片略靠近固定端的主动控制减振性能较好,贴片在中点附近的结构减振性能相似。

3) 在主动控制中,ACL D贴片长度在 $\frac{4}{7}L$ 的结构主动控制对振幅衰减效果最佳,但在贴片全覆盖的结构振动衰减时间最短;贴片长度为 $\frac{5}{7}L$ 和 $\frac{6}{7}L$ 的结构主动控制性能略低于其他结构。

参 考 文 献

- [1] 刘久周,李琳,辛健强,等.具有半主动压电阻尼的叶盘结构动力学特性研究[J].推进技术,2020,41(4):889-902.
LIU Jiuzhou, LI Lin, XIN Jianqiang, et al. Research on dynamic characteristics of blisk with semi-active piezoelectric damping [J]. Journal of Propulsion Technology, 2020, 41(4): 889-902. (in Chinese)
- [2] 王云峰,吴爽,李占芯,等.基于主动阻尼的屈曲梁准零刚度隔振技术研究[J].振动与冲击,2021,40(8):79-84.
WANG Yunfeng, WU Shuang, LI Zhanxin, et al. A study on vibration isolation based on a buckled beam quasi-zero-stiffness isolator and active damping [J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40(8): 79-84. (in Chinese)
- [3] JIANG F, LI L, LIAO W H, et al. Vibration control of a rotating hub-plate with enhanced active constrained layer damping treatment [J]. Aerospace Science and Technology, 2021, 118: 107081.
- [4] LI H, HU X Y, HA S K, et al. Analysis and active control of bending and vibration responses of the MRE multifunctional grid composite sandwich plates [J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2022, 94:

- 104603.
- [5] BAZ A, POH S. Performance of an active control system with piezoelectric actuators[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, 126(2): 327-343.
- [6] LI L, LIAO W H, ZHANG D G, et al. Dynamic modeling and analysis of rotating beams with partially covered enhanced active constrained layer damping treatment[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 455: 46-68.
- [7] KUMAR N, SINGH S P. Vibration and damping characteristics of beams with active constrained layer treatments under parametric variations[J]. *Materials & Design*, 2009, 30(10): 4162-4174.
- [8] SHI Y M, LI Z F, HUA H X, et al. The modelling and vibration control of beams with active constrained layer damping[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 245(5): 785-800.
- [9] 石慧荣, 高溥, 李宗刚, 等. 主动约束阻尼梁的分段线性二次规划自适应减振控制[J]. *机械工程学报*, 2015(9): 104-111.
SHI Huirong, GAO Pu, LI Zonggang, et al. Piecewise linear quadratic programming adaptive vibration control of active constrained layered damping beam[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015(9): 104-111.(in Chinese)
- [10] LU Q F, WANG P, LIU C C. An analytical and experimental study on adaptive active vibration control of sandwich beam[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2022, 232: 107634.
- [11] YAMAN M. Finite element vibration and damping analysis of a partially covered cantilever beam[J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2005, 19(2): 141-151.
- [12] ZHENG H, TAN X M, CAI C. Damping analysis of beams covered with multiple PCLD patches[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2006, 48(12): 1371-1383.
- [13] ZHANG D D, ZHENG L. Active vibration control of plate partly treated with ACLD using hybrid control[J]. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2014, 2014(1): 432970.
- [14] HOU S W, JIAO Y H, CHEN Z B. Optimum layout of partially covered sandwich beam with constrained layer damping[J/OL]. *Applied Mechanics and Materials*, 2011: 588-593.[2011-07-01]. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.66-68.588>.
- [15] ZOGHAIB L, MATTEI P O. Modeling and optimization of local constraint elastomer treatments for vibration and noise reduction[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(26): 7109-7124.
- [16] GAO Y S, ZHANG S Q, ZHAO G Z, et al. Numerical modeling for cantilever sandwich smart structures with partially covered constrained viscoelastic layer[J]. *Composite Structures*, 2022, 281: 114981.
- [17] 黄志诚, 刘莉娅, 吴南星, 等. 基于复合耗能假设的黏弹夹芯梁振动的有限元分析[J]. *振动与冲击*, 2019, 38(5): 106-115.
HUANG Zhicheng, LIU Liya, WU Nanxing, et al. Finite element analysis for vibration of a viscoelastic sandwich beam based on composite energy dissipation hypothesis[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(5): 106-115.(in Chinese)
- [18] 石银明, 华宏星, 傅志方. 黏弹性材料的微振子模型研究[J]. *振动工程学报*, 2001, 14(1): 100-104.
SHI Yinming, HUA Hongxing, FU Zhifang. The micro-oscillator model research for viscoelastic material[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2001, 14(1): 100-104.(in Chinese)
- [19] 王攀, 鲁俊, 邓兆祥, 等. SCLD板模态控制模型及振动控制[J]. *西南交通大学学报*, 2015, 50(4): 717-724.
WANG Pan, LU Jun, DENG Zhaoxiang, et al. Modal control model and vibration control of SCLD plate[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2015, 50(4): 717-724.(in Chinese)
- [20] 罗虹, 李军, 曹友强, 等. 有限元模型动力缩聚中主副自由度选取方法[J]. *机械设计*, 2010, 27(12): 11-14.
LUO Hong, LI Jun, CAO Youqiang, et al. Methods for selecting the master and slave degrees of freedom in dynamic condensation technique of finite element models[J]. *Journal of Machine Design*, 2010, 27(12): 11-14.(in Chinese)
- [21] WANG P, SCORLETTI G, KORNIENKO A, et al. Multi-variable model reduction of smart structure in active vibration control[J]. *IFAC Papers*, 2018, 51(25): 441-446.
- [22] MOHAMMED H A U Q, WASMI H R. Active vibration control of cantilever beam by using optimal LQR controller[J]. *Journal of Engineering*, 2018, 24(11): 1-17.
- [23] HUANG Z C, MAO Y H, DAI A N, et al. Active vibration control of piezoelectric sandwich plates[J]. *Materials*, 2022, 15(11): 3907.



第一作者简介:黄志诚,男,1978年2月生,博士、教授。主要研究方向为机械动力学。曾发表《基于层合理论的被动约束层阻尼板有限元建模及动力学分析》(《振动与冲击》2020年第39卷第23期)等论文。

E-mail:huangzhicheng@jci.edu.cn