

超声振动研磨圆柱齿轮的振动耦合特性研究*

李喜燕^{1,2}, 朱德荣², 杨建军¹, 王 斌¹, 耿瑞广^{1,2}, 张云祥^{1,2}

(1. 河南科技大学机电工程学院 洛阳, 471003)

(2. 洛阳理工学院智能制造学院 洛阳, 471023)

摘要 针对圆柱齿轮在超声振动研磨加工过程中频率特性研究尚不充分的问题, 首先, 将带有轮毂、轮辐和轮缘的圆柱齿轮振动等效为多个圆环板的振动耦合, 基于 Mindlin 中厚板理论, 结合边界条件及位移、转角、剪力和弯矩的连续性条件, 推导了自由状态下齿轮弯曲振动频率方程; 其次, 利用数值计算和有限元分析 (finite element analysis, 简称 FEA) 对圆柱齿轮频率特性进行研究, 并通过锤击法模态试验进行验证; 最后, 对数值计算、有限元仿真与试验测试的数据进行对比分析。结果表明: 将圆柱齿轮振动简化成多个圆环板振动耦合研究频率特性的方法具有较高的可行性; 对圆柱齿轮频率特性的研究, 为圆柱齿轮超声振动研磨加工系统的合理设计提供了理论支持, 同时也为中厚圆盘类零件的振动特性分析提供了参考依据。

关键词 圆柱齿轮; 振动耦合; Mindlin 中厚板理论; 弯曲振动; 频率特性

中图分类号 TH132.417

0 引言

行星齿轮变速器因结构紧凑、传动平稳、承载能力大等显著优势, 在新能源汽车领域得到广泛应用。圆柱齿轮作为行星齿轮的核心传动部件, 在高速化、高精密的发展趋势下, 对硬齿面齿轮的齿形精度、齿面质量、显微硬度与微观形貌提出了更高要求。然而, 传统齿轮加工方法已不能满足这一需求^[1]。因此, 亟需探索一种适用于大批量生产的高效精密硬齿面齿轮加工方法, 超声加工也因此被逐步引入齿轮的精整加工领域。

文献[2-4]对超声研齿振动系统进行了设计与研究, 发现超声研齿工艺较传统方法具有显著优势, 齿面粗糙度降至 $0.2\ \mu\text{m}$, 材料去除率提升 3 倍, 齿轮副噪声降低 3~8 dB, 为复杂齿轮超声加工系统的非谐振设计提供了理论支撑。杨建军等^[5]通过理论建模、参数优化、有限元验证及实验测试, 解决了带轴锥齿轮超声加工中谐振频率匹配与振幅放大的问题, 为复杂结构齿轮的高效精密加工提供了技术支撑, 对提升齿轮表面质量及制造效率具有重要工程价值。

由于齿轮长期在高速、重载等复杂条件下工作, 通过动力学响应可精准预测系统振动状态, 从而有

效避免共振与混沌现象, 并降低振动幅值和噪声水平, 有助于确保运行时的稳定性和可靠性^[6]。Mabrouk 等^[7]使用瑞利能量法和多尺度分析法, 针对中型和重型卡车的三级行星齿轮传动系统动态特性进行研究, 建立集中参数模型并求解系统的特征频率和模态振型, 对比分析了 2 种方法的精度差异, 为抑制共振和优化可靠性提供了现实指导。Cui 等^[8]针对复合行星齿轮系统, 建立了综合考虑发动机谐波激励与内部非线性因素的弯扭耦合动力学模型, 揭示了系统存在行星轮振动、全局振动及耦合振动这 3 种模态。该研究发现固有频率轨迹随参数变化呈现模态转换与交叉现象, 为变速箱减振降噪设计提供了理论依据, 并且可指导系统避开共振区, 提升运行稳定性。Tan 等^[9]针对双行星轮系建立了平移-扭转耦合集中参数动力学模型, 深入分析了系统固有特性及其影响规律, 为解决直升机传动系统的振动噪声问题提供了理论依据, 也为其结构优化与减振设计奠定了动力学基础。冯珂等^[10]基于循环平稳分析实现了齿轮磨损退化状态的精准监测。侯磊等^[11]则揭示了质量偏心与参数耦合对齿轮系统非线性振动的影响机制, 为齿轮振动特性分析与减振设计提供了重要依据。

目前研究主要聚焦于齿轮系统的固有频率特性

* 国家自然科学基金资助项目 (52275054, 51375144); 河南省科技攻关计划资助项目 (222102220042)

收稿日期: 2025-05-07; 修回日期: 2025-07-04

分析,或是对超声振动系统的振动特性进行的整体分析,而针对单个齿轮零件频率特性的研究相对较少。对单个齿轮的弯曲振动特性进行分析,对于避免超声振动系统与齿轮发生有害共振,优化超声振动参数匹配、提升超声加工效率和齿面质量至关重要,具有重要的理论意义和工程价值。

综上,本研究将圆柱齿轮简化成与圆柱齿轮分度圆直径相等的中厚圆盘,将圆柱齿轮的振动等效为多个圆环板的振动耦合,基于 Mindlin 中厚板理论以及力与位移连续条件,推导自由边界条件下的圆柱齿轮发生横向弯曲振动的频率方程。此外,利用数值计算、FEA 和锤击法模态试验对齿轮圆盘频率特性进行研究,为圆柱齿轮超声振动加工系统工艺优化提供理论参考。

1 分析与建模

1.1 振动类型分析

超声辅助加工工艺是一种在制造过程中通过调控外部能量输入,实现制造表面成形性的良好工艺方法以及能量调控的途径。该工艺可实现外部能量作用下的制造对象微观组织的遗传与演变,通过对界面能量进行精准调控,实现制造形状精度与表面完整性的协同提升,获得预期的微观组织结构,从而达到高性能制造的目的^[12]。

圆柱齿轮振动类型模型如图 1 所示。超声变幅杆将沿轴线的纵向超声激励放大并传递至圆柱齿轮后端面,形成周期性变化的压力负载 q 。该负载在圆柱齿轮内部激发三维动态应力,诱导齿轮内部产生径向转矩、周向转矩以及轴向截面剪力。其中,径向转矩的作用可促使圆柱齿轮发生轴对称弯曲振动与变形,引发由纵向振动向弯曲振动的转变过程。此外,圆柱齿轮为轴对称结构,整体的周向转矩 M_θ 为零,而轴向截面剪力 Q_r 由纵向振动作用产生,因

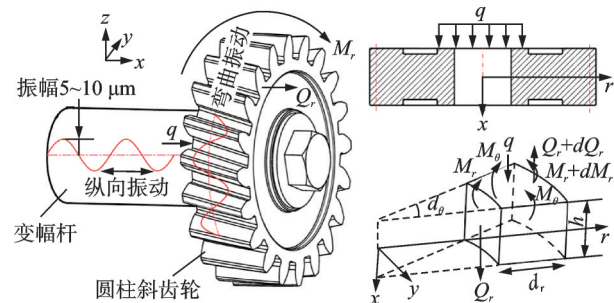


图 1 圆柱齿轮振动类型模型
Fig.1 Vibration mode classification of the cylindrical gear

此 Q_r 表现出超声振动的特性,在圆柱齿轮齿面的齿长、齿高方向的应力分量具有相同的超声振动特性。在超声振动能量作用下,研磨磨粒通过高频锤击、弹跳冲击及空化效应协同作用,使得齿面材料发生塑性流动与微切削分离,提高了材料去除效率,改善了加工表面的质量。

1.2 数学模型

圆柱齿轮是行星齿轮的关键零部件,广泛应用于新能源汽车、航空航天等工程领域。以图 2 所示的圆柱齿轮物理模型为例,构建圆柱齿轮弯曲振动理论分析模型。



图 2 圆柱齿轮物理模型
Fig.2 Physical model of the cylindrical gear

在构建圆柱齿轮横向弯曲振动理论分析模型时,忽略各种齿轮倒角等参数对振动系统频率特性的影响。假设齿轮材料为均匀各向同性,将圆柱齿轮简化为与齿轮分度圆直径大小相等的圆环盘。图 3 为圆柱齿轮的弯曲振动分析模型,图 4 为圆柱齿轮弯曲振动分析的简化圆环板模型。

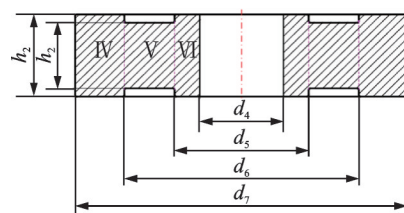


图 3 圆柱齿轮的弯曲振动分析模型
Fig.3 Bending vibration analysis model for cylindrical gears

图 3 所示的圆柱齿轮工程图可看作图 4 所示的简化圆环板 IV、圆环板 V 和圆环板 VI 的组合物。圆柱齿轮由轮毂、轮辐和轮缘组成,简化后的各个圆环板的高度不同,超声波传播至圆环板的接触圆柱面时,影响超声波传播的连续性及稳定性。理论上圆环板 IV 与圆环板 V 在直径为 d_6 、高度为 h_2 的圆柱面处产生振动耦合,圆环板 V、圆环板 VI 在直径为 d_5 、

高度为 h_1 的圆柱面处产生振动耦合,满足力与位移连续条件。因此,圆柱齿轮的振动可近似理解为由多个单独的圆环板振动耦合而成。

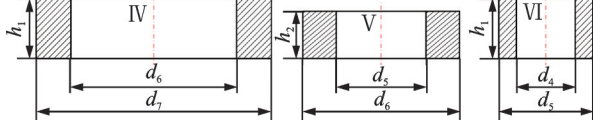


图4 圆柱齿轮弯曲振动分析的简化圆环板模型

Fig.4 Simplified annular plates model for bending vibration analysis of cylindrical gears

2 理论分析

根据 Mindlin 中厚板理论,推导圆柱齿轮横向弯曲的频率方程,第 i 个圆环板单元的三维弹性动力学基本方程^[13]为

$$\begin{cases} \omega_i = J_0(\delta_{1i}, r)A_{1i} + Y_0(\delta_{1i}, r)B_{1i} + J_0(\delta_{2i}, r)A_{2i} + Y_0(\delta_{2i}, r)B_{2i} \\ \beta_i = (\sigma_{1i} - 1)[J'_0(\delta_{1i}, r)A_{1i} + Y'_0(\delta_{1i}, r)B_{1i}] + (\sigma_{2i} - 1)[J'_0(\delta_{2i}, r)A_{2i} + Y'_0(\delta_{2i}, r)B_{2i}] \\ Q_{ri} = \frac{G_i h_i \pi^2}{12} [\sigma_{1i} J'_0(\delta_{1i}, r)A_{1i} + Y'_0(\delta_{1i}, r)B_{1i} + \sigma_{2i} J'_0(\delta_{2i}, r)A_{2i} + Y'_0(\delta_{2i}, r)B_{2i}] \\ M_{ri} = D_i \left\{ (\sigma_{1i} - 1) \left[J''_0(\delta_{1i}, r) + \frac{\mu_i}{r} J'_0(\delta_{1i}, r) \right] A_{1i} + (\sigma_{1i} - 1) \left[Y''_0(\delta_{1i}, r) + \frac{\mu_i}{r} Y'_0(\delta_{1i}, r) \right] B_{1i} + \right. \\ \left. (\sigma_{2i} - 1) \left[J''_0(\delta_{2i}, r) + \frac{\mu_i}{r} J'_0(\delta_{2i}, r) \right] A_{2i} + (\sigma_{2i} - 1) \left[Y''_0(\delta_{2i}, r) + \frac{\mu_i}{r} Y'_0(\delta_{2i}, r) \right] B_{2i} \right\} \end{cases} \quad (2)$$

其中: $J_0(\delta, r)$ 为第1类贝塞尔函数; $Y_0(\delta, r)$ 为第2类贝塞尔函数; $S_i = 12D_i / (G_i h_i \pi^2)$, 为横向剪切变形; $R_i = h_i^2 / 12$, 为转动惯量; $G_i = E_i / [2(1 + \mu_i)]$, 为剪切弹性模量; $\sigma_{1i} = (\delta_{2i})^2 / [R_i(\delta_{0i})^2 - S_i^{-1}]$; $\sigma_{2i} = (\delta_{1i})^2 / [R_i(\delta_{0i})^2 - S_i^{-1}]$; $(\delta_{0i})^4 = \rho h_i \pi / D_i$; $(\delta_{1i})^2 = (\delta_{0i})^4 [(R_i + S_i) + \sqrt{(R_i - S_i) + 4(\delta_{0i})^{-4}}] / 2$; $(\delta_{2i})^2 = (\delta_{0i})^4 [(R_i + S_i) - \sqrt{(R_i - S_i) + 4(\delta_{0i})^{-4}}] / 2$; $D_i = G_i h_i^3 / [12(1 - \mu_i^2)]$, 为弯曲刚度; E_i 、 μ_i 、 ρ_i 、 h_i 分别为材料的弹性模量、泊松比、密度、厚度。

因圆柱齿轮的轮毂、轮辐和轮缘的厚度各不相同,在圆柱齿轮发生横向弯曲过程中,为适应齿轮各个圆环板之间厚度的变化,并保证各个圆环板连接圆柱接触面处耦合振动的连续性,在直径为 d_5 、高度为 h_1 的整个圆柱面处和直径为 d_6 、高度为 h_2 的整个圆柱面处的力与位移是连续的^[14]。即圆环板 IV 与圆环板 V 在直径 d_5 处、环板 VI 与圆环板 V 在直径 d_6 处的横向位移、转角位移、截面剪切内力和截面弯矩内力分别相等,即

$$\begin{cases} \frac{\partial M_{ri}}{\partial r} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial M_{r\theta i}}{\partial \theta} + \frac{M_{ri} - M_{\theta i}}{r_i} - Q_{ri} = \frac{\rho h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \beta_{ri}}{\partial h^2} \\ \frac{\partial M_{r\theta i}}{\partial r} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial M_{\theta i}}{\partial \theta} + 2 \frac{M_{r\theta i}}{r_i} - Q_{\theta i} = \frac{\rho h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \beta_{\theta i}}{\partial h^2} \\ \frac{\partial Q_{ri}}{\partial r} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial Q_{\theta i}}{\partial \theta} + \frac{Q_{ri}}{r_i} = \rho h_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial h^2} \end{cases} \quad (1)$$

其中: $i=4, 5, 6$, 为圆环板单元编号; r_i 为圆环板的半径; β_{ri} 为径向转角; $\beta_{\theta i}$ 为周向转角; ρ 为材料密度; h_i 为圆环板的厚度; $Q_{\theta i}$ 、 Q_{ri} 为圆环板 i 的剪力分量; $M_{\theta i}$ 、 M_{ri} 为圆环板 i 的弯矩分量。

为得到良好的齿面质量,在加工时要求圆柱齿轮做轴对称横向弯曲振动,因此形变 $\beta_{\theta i} \equiv 0$ 。求解式(1)可得第 i 个圆环板单元的横向位移 ω_i 、转角位移 β_i 、截面剪切内力 Q_{ri} 和截面弯矩内力 M_{ri} 表达式为

$$\begin{cases} \omega_{4r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_5}{2}} = \omega_{5r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_5}{2}} \\ \omega_{5r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_5}{2}} = \omega_{6r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_6}{2}} \\ \beta_{4r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_5}{2}} = \beta_{5r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_5}{2}} \\ \beta_{5r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_5}{2}} = \beta_{6r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_6}{2}} \\ Q_{4r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_5}{2}} = Q_{5r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_5}{2}} \\ Q_{5r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_5}{2}} = Q_{6r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_6}{2}} \\ M_{4r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_5}{2}} = M_{5r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_5}{2}} \\ M_{5r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_5}{2}} = M_{6r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_6}{2}} \end{cases} \quad (3)$$

同时,圆柱齿轮内孔和轮缘部分均处于自由状态,所受截面剪切内力和截面弯矩内力均为零,即

$$\begin{cases} Q_{4r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_1}{2}} = 0 \\ M_{4r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_1}{2}} = 0 \\ Q_{6r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_7}{2}} = 0 \\ M_{6r}(r, \theta)|_{r=\frac{d_7}{2}} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

式(3)、(4)构成了圆柱齿轮横向弯曲振动的频率方程,包含圆柱齿轮的结构尺寸参数和齿轮发生横向弯曲振动时的固有频率。若各部分结构参数已知,即可求得圆柱齿轮产生横向弯曲振动时的振动

频率。反之,若圆柱齿轮发生横向弯曲振动时的振动频率已知,亦可求出圆柱齿轮各部分的尺寸参数。

将式(2)代入式(3)、(4),可得含有齿轮横向弯曲振动的方程组,用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} D_{0101} & D_{0102} & D_{0103} & D_{0104} & D_{0105} & D_{0106} & D_{0107} & D_{0108} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{0201} & D_{0202} & D_{0203} & D_{0204} & D_{0205} & D_{0106} & D_{0207} & D_{0208} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{0301} & D_{0302} & D_{0303} & D_{0304} & D_{0305} & D_{0106} & D_{0307} & D_{0308} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{0401} & D_{0402} & D_{0403} & D_{0404} & D_{0405} & D_{0106} & D_{0407} & D_{0408} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{0505} & D_{0506} & D_{0507} & D_{0508} & D_{0509} & D_{0510} & D_{0511} & D_{0512} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{0605} & D_{0606} & D_{0607} & D_{0608} & D_{0609} & D_{0610} & D_{0611} & D_{0612} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{0705} & D_{0706} & D_{0707} & D_{0708} & D_{0709} & D_{0710} & D_{0711} & D_{0712} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{0805} & D_{0806} & D_{0807} & D_{0808} & D_{0809} & D_{0810} & D_{0811} & D_{0812} \\ D_{0901} & D_{0902} & D_{0903} & D_{0904} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{1001} & D_{1002} & D_{1003} & D_{1004} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1109} & D_{1110} & D_{1112} & D_{1113} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1209} & D_{1210} & D_{1211} & D_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{14} \\ B_{14} \\ A_{24} \\ B_{24} \\ A_{15} \\ B_{15} \\ A_{25} \\ B_{25} \\ A_{16} \\ B_{16} \\ A_{26} \\ B_{26} \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

其中: A_{ij} 、 B_{ij} ($i=1, 2; j=4, 5, 6$)为圆环板Ⅳ、Ⅴ和Ⅵ形变函数和内力函数中的待定常数; D_{ij} ($i=01, \dots, 12; j=01, 02, \dots, 12$)为 A_{ij} 、 B_{ij} 的系数,由式(3)、(4)确定。

若使含圆柱齿轮结构尺寸参数和横向弯曲振动固有频率的齐次方程组式(5)有解,且待定系数 A_{ij} 、 B_{ij} 的值不全为零,则由 A_{ij} 、 B_{ij} 组成的行列式 D_{ij} 必须为零,即

$$\Delta = \begin{vmatrix} D_{0101} & D_{0102} & D_{0103} & D_{0104} & D_{0105} & D_{0106} & D_{0107} & D_{0108} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{0201} & D_{0202} & D_{0203} & D_{0204} & D_{0205} & D_{0106} & D_{0207} & D_{0208} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{0301} & D_{0302} & D_{0303} & D_{0304} & D_{0305} & D_{0106} & D_{0307} & D_{0308} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{0401} & D_{0402} & D_{0403} & D_{0404} & D_{0405} & D_{0106} & D_{0407} & D_{0408} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{0505} & D_{0506} & D_{0507} & D_{0508} & D_{0509} & D_{0510} & D_{0511} & D_{0512} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{0605} & D_{0606} & D_{0607} & D_{0608} & D_{0609} & D_{0610} & D_{0611} & D_{0612} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{0705} & D_{0706} & D_{0707} & D_{0708} & D_{0709} & D_{0710} & D_{0711} & D_{0712} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{0805} & D_{0806} & D_{0807} & D_{0808} & D_{0809} & D_{0810} & D_{0811} & D_{0812} \\ D_{0901} & D_{0902} & D_{0903} & D_{0904} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{1001} & D_{1002} & D_{1003} & D_{1004} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1109} & D_{1110} & D_{1112} & D_{1113} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1209} & D_{1210} & D_{1211} & D_{1212} \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

式(6)为圆柱齿轮在自由状态下产生横向弯曲振动的频率方程,包含圆柱齿轮的设计参数以及弯曲振动频率。若齿轮设计参数已知,通过式(6)求得频率 f ,此时的 f 值即为圆柱齿轮发生横向弯曲振动时的振动频率。基于上述计算过程,所得振动频率可为避免结构共振以及超声辅助齿轮加工系统的谐振频率设计提供参考。

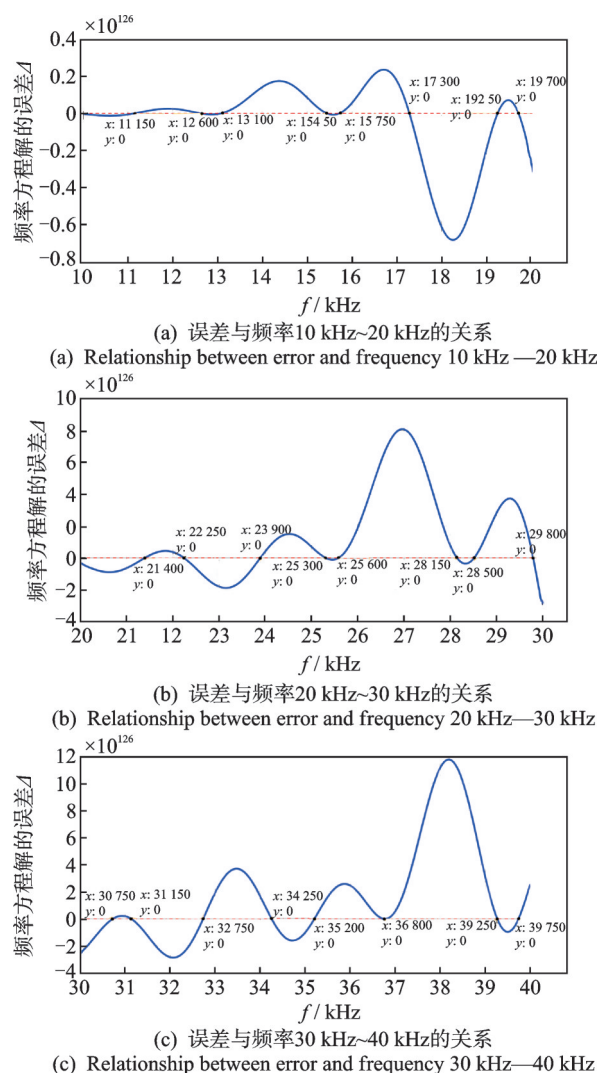
3 设计实例与有限元验证

3.1 设计实例

以圆柱齿轮为例,选定一组参数值, $d_7=70$ mm,

$d_6=56$ mm, $d_5=32$ mm, $d_4=20$ mm, $h_1=20$ mm, $h_2=16$ mm,通过数值计算与有限元仿真验证理论是否正确。圆柱齿轮材料选用45钢,材料密度 $\rho=7\ 800$ kg/m³,弹性模量 $E=210$ GPa,泊松比 $\mu=0.28$ 。

式(6)为复杂超越方程,利用Matlab进行数值计算求解。圆柱齿轮的工作频率 f 为自变量,频率方程解的误差为因变量,采用牛顿迭代法求解频率方程,迭代精度设为50 Hz,求解范围设为10 kHz~40 kHz。频率方程解的误差与工作频率 f 的关系如图5所示,频率方程解的误差 Δ 为量纲一的量。由图可知,对于自由状态下的圆柱齿轮,所得的24个工作频率均可使圆柱齿轮在自由状态时产生横向弯曲振动。

图5 频率方程解的误差与工作频率 f 的关系Fig.5 Relationship between the error in the solution of the frequency equation and the operating frequency f

3.2 有限元建模与仿真

模态分析是结构动力学领域的一项关键技术,旨在研究结构在动态载荷下的振动特性,包括固有频率、振型等参数。这些特性直接影响结构的稳定性、安全性和使用寿命。

使用 SolidWorks 软件建立圆柱齿轮的分析模型,导入 Ansys Workbench 进行模态分析。圆柱齿轮的材料设置为 45 钢,根据圆柱齿轮的几何形状进行自动网格划分,并将单元尺寸设置为 3 mm,以调整网格疏密程度。为更加准确分析圆柱齿轮的固有频率和振型,将 Relevance Center 从系统默认的 Coarse(粗糙)设置为 Medium(中等),并将控制邻近单元增长比的选项 Transition 设置成 Fast(快速)。

网格划分产生的几何模型的节点数量为 82 364,单元数量为 47 443,同时限制频率搜索范围为

10 kHz~40 kHz,使用 Ansys Workbench 默认的自动求解器进行模态求解。自由振动状态下圆柱齿轮的节圆节径混合振型、节圆振型分别如图 6、图 7 所示。其中: m 为节径数,即沿齿轮周向方向节线的数量; n 为节圆数,即沿齿轮径向方向横向位移为零圆的数量。

由图 6 可见,在频率为 11.286、22.595、32.128 和 39.749 kHz 时,圆柱齿轮产生了节圆节径混合振动模态。此时圆柱齿轮被分割为凹凸分布的若干部

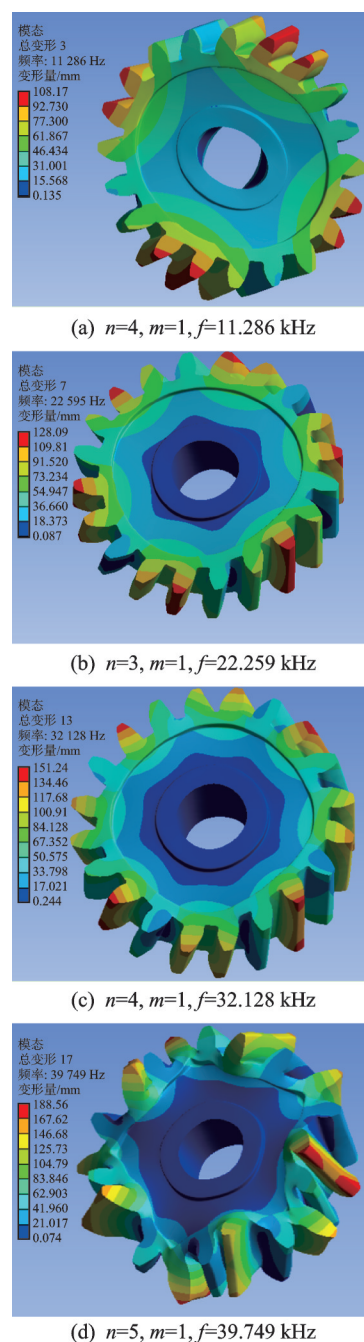


图6 圆柱齿轮的节圆节径混合振型

Fig.6 Combined pitch circle and nodal diameter vibration mode of cylindrical gears

分,易导致工具和工件之间相对运动不稳定,使得齿面加工过程中齿面受力不均匀,齿面精度降低。

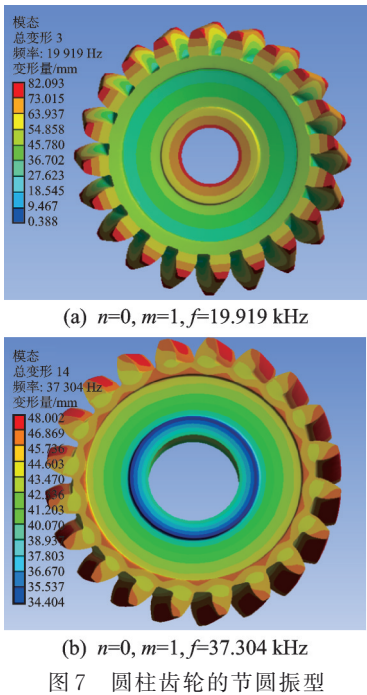


图 7 圆柱齿轮的节圆振型

Fig.7 Vibration mode of pitch circle of a cylindrical gear

由图 7 可知,当频率为 19.919、37.304 kHz 时,圆柱齿轮产生了零节径轴对称横向弯曲振动,与理论分析结果 19.700、36.800 kHz 之间的相对误差较小,说明将圆柱齿轮的振动视为多个圆环板振动耦合的方法是可行的。此外,在断续切削条件下,若齿轮为零节径轴对称横向弯曲振动,可减少冲击载荷,促使切削力更加均匀,从而提升加工过程的稳定性,有助于提高圆柱齿轮超声振动研磨加工时的齿面研磨质量。

4 试验与讨论

为验证上述设计过程的正确性,开展了锤击法模态试验。

4.1 振动类型分析

锤击法测量齿轮模态试验系统如图 8 所示,包括悬挂齿轮的弹力绳、YTRAN 5800B4 型力锤、YTRAN 3097A2 型加速度传感器和 m+p Analyzer 数据采集系统与分析系统,使用 m+p VibPilot 振动控制和动态信号分析仪采集数据。

由于圆柱齿轮形状及空间的限制,以圆柱齿轮背面为测试面,试验共设置 48 个测点,确保能够捕捉到主要的振动信号,沿周向均匀选取 4 个加速度

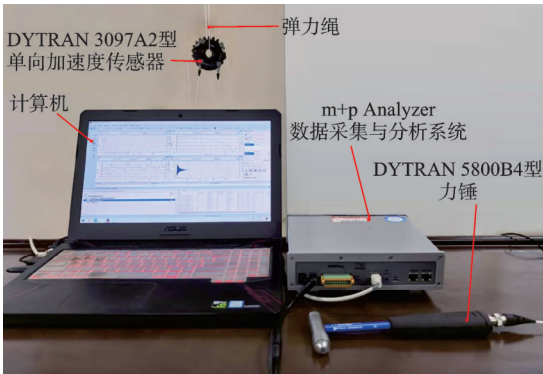


图 8 锤击法测量齿轮模态试验系统

Fig.8 Schematic of impact hammer modal test system for gears

传感器响应点,模态试验模型如图 9 所示。设置数据采集系统以 128 kHz 的采样频率记录振动信号,采用移动力锤-固定测点的方式依次对测试点进行轴向激励,重复试验 3 次以确保数据可靠,取 3 次试验数据平均值为最终结果。

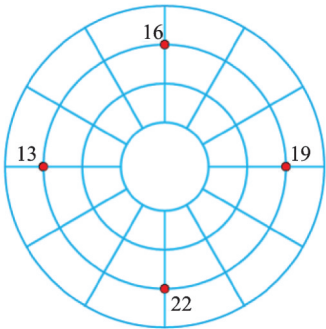


图 9 模态试验模型

Fig.9 Modal test specimen

4.2 结果与讨论

基于上述试验测试方案,经模态参数辨识提取圆柱齿轮的前 17 阶频率与振型。数值计算、有限元仿真及试验测试频率数据如表 1 所示,展示了第 1、3、7、13、14、17 阶的模态试验测试频率。

表 1 数值计算、有限元仿真及试验测试频率数据

Tab.1 Frequency data by numerical calculations, finite element simulations, and experiments kHz

模态阶数	数值计算 频率 f_c	有限元仿真 频率 f_k	试验测试 频率 f_e
1	11.150	11.297	11.541
3	19.700	19.919	19.987
7	22.250	22.595	22.684
13	32.750	32.128	31.823
14	36.800	37.304	37.482
17	39.750	39.749	39.535

图 10 为数值计算、有限元仿真及试验测试频率对比。由图可知,试验测试的齿轮横向弯曲振动频率分别为 11.541、19.987、22.684、31.823、37.482 和 39.535 kHz。分析数据可知,数值计算频率为 11.150、19.700、22.250、32.750、36.800 和 39.750 kHz,有限元仿真频率为 11.297、19.919、22.595、32.128、37.304 和 39.749 kHz,三者间的相对误差较小,说明将齿轮整体振动近似理解为多个单独的圆环板振动耦合而成的方法是可行的。

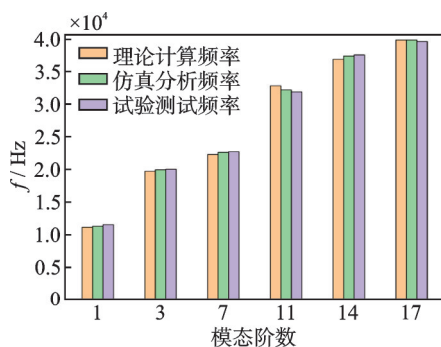


图 10 数值计算、有限元仿真及试验测试频率对比
Fig.10 Comparison of frequency data by numerical calculations, finite element simulations, and experiments

5 求解精度分析

Mindlin 中厚板理论是三维线弹性理论的简化,其适用范围有一定限制^[15],因此上述设计方法受到一定限制。对于带轮毂、轮辐和轮缘的圆柱齿轮,由于其特殊的结构特点,求解精度不仅与厚径比 h_1/d_7 有关,也可能与轮毂-轮辐厚度比 h_1/h_2 有较大关系。

保持圆柱齿轮其他结构尺寸不发生改变,仅改变圆柱齿轮轮毂的厚度 h_1 ,通过数值计算与有限元仿真研究圆柱齿轮的第 1 阶横向弯曲振动频率,数值计算与有限元仿真结果比较如表 2 所示。

表 2 h_1/h_2 比值改变时齿轮横向弯曲振动频率计算结果对比
Tab.2 Comparison of calculated transverse bending vibration frequencies of gears with variable h_1/h_2

h_1/mm	h_1/d_7	h_1/h_2	计算频率 f_c/kHz	仿真频率 f_k/kHz	偏差 $\Delta f/\%$
16	0.228 5	1.20	10.350	10.410	0.58
20	0.285 7	1.25	11.200	11.292	0.82
24	0.342 8	1.30	11.600	12.218	5.33
28	0.400 0	1.35	11.550	12.438	7.69
32	0.457 1	1.40	11.750	12.902	9.80
36	0.514 2	1.45	11.650	13.118	12.60

$$\Delta f = \frac{|\text{计算频率} - \text{仿真频率}|}{\text{计算频率}} \times 100\%$$

由表 2 可知,在其他尺寸固定的情况下,随着圆柱齿轮轮毂的厚度 h_1 逐渐变大,数值计算频率与有限元仿真频率的偏差不断加大,在 $h_1/d_7=0.342\ 8$ 时,偏差为 5.33%,远超所能接受的误差范围。原因在于圆柱齿轮的特殊结构,数值计算精度不仅受 h_1/d_7 的影响,也与 h_1/h_2 有很大关系。

保持 h_1/h_2 固定,改变 h_1 与 h_2 的数值,数值计算与有限元仿真结果比较如表 3 所示,展示了数值计算频率与有限元分析频率随 h_1 、 h_2 的变化情况。

表 3 h_1/h_2 比值不变时齿轮横向弯曲振动频率计算结果对比
Tab.3 Comparison of calculated transverse bending vibration frequencies of gears with constant h_1/h_2

h_1/mm	h_1/d_7	h_1/h_2	计算频率 f_c/kHz	仿真频率 f_k/kHz	偏差 $\Delta f/\%$
16	0.228 5	1.25	10.400	10.432	0.31
20	0.285 7	1.25	11.200	11.292	0.82
24	0.342 8	1.25	12.350	12.542	1.56
28	0.400 0	1.25	12.800	13.163	2.84
32	0.457 1	1.25	13.300	13.993	5.21
36	0.514 2	1.25	13.650	14.661	7.41

从表 3 可以看出,在保持圆柱齿轮轮毂-轮辐厚度比($h_1/h_2=1.25$)不变的情况下,随着齿轮厚径比 h_1/d_7 的递增,圆柱齿轮第 1 阶横向弯曲振动频率的数值计算与有限元分析结果的相对误差呈现非线性增长的趋势。当 $h_1/d_7 \leq 0.4$ 时,最大相对误差为 2.84%,在允许的误差范围内,理论求解精度较高。值得注意的是,当 $h_1/d_7 > 0.4$ 时,误差呈现显著增大的趋势,当 $h_1/d_7=0.457\ 1$ 时,相对误差达 5.21%。

6 结 论

1) 通过对圆柱齿轮横向弯曲振动模态的内力分布进行深入分析,为构建圆柱齿轮横向弯曲频率方程奠定了理论基础。

2) 基于 Mindlin 中厚板理论,结合圆环板圆柱面之间力与位移的连续条件,推导并建立了圆柱齿轮弯曲振动的频率方程。通过数值计算方法,求解齿轮在 10 kHz~40 kHz 范围内的横向弯曲振动频率,为超声振动系统的设计提供了理论依据。

3) 通过有限元仿真及锤击法模态试验,验证了所提理论的准确性,并进一步验证了将圆柱齿轮弯曲振动简化为多个圆环板振动耦合方法的可行性,为超声振动系统的优化设计及结构共振提供了技术支持。

4) 圆柱齿轮横向弯曲振动频率的求解精度不仅受齿轮厚径比 h_1/d_7 影响,也与轮毂-轮辐厚度比 h_1/h_2

有较大关系。在Mindlin中厚板理论的适用范围内,该理论对圆柱齿轮横向弯曲振动特性的分析精度较高。

参 考 文 献

- [1] KRAJNIK P, HASHIMOTO F, KARPUSCHEWSKI B, et al. Grinding and fine finishing of future automotive powertrain components[J]. CIRP Annals, 2021, 70(2): 589-610.
- [2] ZHU D R, YANG J J, DENG X Z, et al. Influence of gear parameters on dynamic characteristics of an ultrasonic vibration system[J]. Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, 2018, 42(3): 252-267.
- [3] 朱德荣, 杨建军, 邓效忠, 等. 复合结构研齿换能器的动力学特性与设计[J]. 振动、测试与诊断, 2020, 40(1): 70-78.
ZHU Derong, YANG Jianjun, DENG Xiaozhong, et al. Dynamic characteristics and design of composite structure lapping transducer[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2020, 40(1): 70-78. (in Chinese)
- [4] 朱德荣, 邓效忠, 杨建军, 等. 超声研磨齿轮振动系统的设计及实验[J]. 振动与冲击, 2017, 36(20): 195-202.
ZHU Derong, DENG Xiaozhong, YANG Jianjun, et al. A design of the vibration system of an ultrasonic lapping gear and its experiment[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(20): 195-202. (in Chinese)
- [5] 杨建军, 郭浩杰, 朱德荣, 等. 带轴锥齿轮超声研齿振动系统的设计与试验[J]. 中国机械工程, 2018, 29(4): 403-408.
YANG Jianjun, GUO Haojie, ZHU Derong, et al. Design of ultrasonic gear lapping vibration systems for bevel gears with shaft[J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29(4): 403-408. (in Chinese)
- [6] 莫帅, 柏代鑫, 李国正, 等. 直升机主减速器传动系统非线性动力学[J/OL]. 振动工程学报, 2025: 1-12. (2025-02-17)[2025-03-25]. <https://link.cnki.net/urlid/32.1349.TB.20250217.0934.002>.
MO Shuai, BAI Daixin, LI Guozheng, et al. Nonlinear dynamics of helicopter main reducer transmission system [J/OL]. Journal of Vibration Engineering, 2025: 1-12. (2025-02-17) [2025-03-25]. <https://link.cnki.net/urlid/32.1349.TB.20250217.0934.002>. (in Chinese)
- [7] MABROUK M, GAO P, YAN K Y, et al. A comparative analysis of multi-scale and Rayleigh approaches in capturing eigenfrequencies and mode shape evaluation in planetary gear transmission systems of medium and heavy trucks[J]. Machines, 2024, 12(1): 48.
- [8] CUI T Q, LI Y N, ZAN C L, et al. Dynamic modeling and analysis of nonlinear compound planetary system[J]. Machines, 2022, 10(1): 31.
- [9] TAN W Z, ZHENG Z B, WU X S, et al. Analysis of inherent characteristics of two-speed planetary gear transmission system[J]. Mathematical Problems in Engineering: Theory, Methods and Applications, 2023, 2023: 1-14.
- [10] 冯珂, 钱庭钰, 张紫琳, 等. 基于循环平稳分析的齿轮磨损退化状态监测[J]. 振动、测试与诊断, 2026, 46(2): 229-238.
FENG Ke, QIAN Tingyu, ZHANG Zilin, et al. Gear wear degradation condition monitoring based on cyclostationary analysis[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2026, 46(2): 229-238. (in Chinese)
- [11] 侯磊, 宋金洲, 昌泽元, 等. 考虑动态啮合参数与时变齿隙的含质量偏心齿轮系统动力学特性分析[J]. 振动工程学报, 2025, 38(6): 1335-1343.
HOU Lei, SONG Jinzhou, CHANG Zeyuan, et al. Dynamic characteristics analysis of gear system with mass eccentricity considering dynamic meshing parameters and time-varying backlash[J]. Journal of Vibration Engineering, 2025, 38(6): 1335-1343. (in Chinese)
- [12] 别文博, 赵波, 王晓博, 等. 超声加工在齿轮抗疲劳制造中的研究综述与展望[J]. 表面技术, 2018, 47(7): 35-51.
BIE Wenbo, ZHAO Bo, WANG Xiaobo, et al. Overview and expectation on gear anti-fatigue manufacture by ultrasonic-assisted machining[J]. Surface Technology, 2018, 47(7): 35-51. (in Chinese)
- [13] 吕明, 王时英, 秦慧斌. 非谐振设计理论与齿轮超声加工[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 51-52.
- [14] 余银柱, 吕明, 王时英. 阶梯变厚度齿轮的横向弯曲振动[J]. 机械科学与技术, 2013, 32(1): 116-119, 125.
SHE Yinzhū, LÜ Ming, WANG Shiyīng. Transverse bending vibration of gear with stepped variable thickness [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2013, 32(1): 116-119, 125. (in Chinese)
- [15] LEE H. Modal acoustic radiation characteristics of a thick annular disk[D]. Ohio: The Ohio State University, 2003.



第一作者简介:李喜燕,女,2000年4月生,研究生。主要研究方向为圆柱齿轮超声加工技术。
E-mail:15239316328@163.com

通信作者简介:朱德荣,男,1972年6月生,博士、教授。主要研究方向为弧齿锥齿轮超声加工技术。
E-mail:zderong8@163.com